

JULES VIEILLE

**Sur la construction des racines de l'équation
du quatrième degré par l'intersection
d'une parabole et d'un cercle**

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 16
(1857), p. 453-456

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1857_1_16__453_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1857, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

SUR LA CONSTRUCTION

Des racines de l'équation du quatrième degré par l'intersection d'une parabole et d'un cercle ;

PAR M. JULES VIEILLE.

Soit l'équation

$$(1) \quad x^4 + px^2 + qx + r = 0,$$

dont on se propose de construire géométriquement les racines.

Le moyen le plus simple consiste, comme on sait, à employer la parabole ayant pour paramètre l'unité, et le cercle. A cet effet, on pose

$$(2) \quad x^2 = y.$$

En remplaçant x^2 par y dans l'équation (1), on a

$$(3) \quad y^2 + py + qx + r = 0,$$

puis si l'on ajoute membre à membre les équations (2) et (3), il vient

$$(4) \quad y^2 + x^2 + (p-1)y + qx + r = 0,$$

équation d'un cercle dont les points d'intersection avec la parabole représentée par l'équation (2) ont pour abscisses les racines de l'équation (1). Mais ce cercle n'est pas toujours réel. Si l'on écrit son équation sous la forme

$$\left(y + \frac{p-1}{2}\right)^2 + \left(x + \frac{q}{2}\right)^2 = \frac{(p-1)^2 + q^2}{4} - r,$$

on voit qu'il sera imaginaire toutes les fois qu'on aura

$$(5) \quad r > \frac{(p-1)^2 + q^2}{4};$$

Et alors se présentent ces deux questions :

1°. *Quand le cercle défini par l'équation (4) est imaginaire, l'équation (1) a-t-elle ses racines imaginaires?*

2°. *Réciproquement, quand l'équation (1) a ses racines imaginaires, le cercle est-il toujours imaginaire?*

La réponse à la première question est affirmative : toutes les fois que le cercle est imaginaire, il est vrai que l'équation (1) a ses racines imaginaires. En effet, à une valeur réelle de x qui vérifierait l'équation (1), correspondrait une valeur réelle de y tirée de l'équation (2); et comme les solutions du système (1) et (2) vérifient nécessairement l'équation (4), il s'ensuivrait que cette dernière admettrait une solution réelle, ce qui est contre l'hypothèse.

Ainsi, quand l'inégalité (5) aura lieu, on sera certain que l'équation proposée n'a que des racines imaginaires, et, par conséquent, toute autre combinaison de lieux géométriques *réels* serait inutile à chercher, en vue de construire ces racines.

Il n'en est pas de même de la seconde question : de ce que l'équation (1) a ses racines imaginaires, il ne s'ensuit pas que le cercle défini par l'équation (4) soit nécessairement imaginaire. On conçoit en effet que, pour certaines valeurs des coefficients p, q, r , le cercle, quoique réel, puisse ne pas couper la parabole, dont l'équation ne dépend pas de ces mêmes coefficients. Pour éclaircir ce point, attachons-nous à l'équation plus simple

$$x^4 + qx + r = 0,$$

dans laquelle le terme en x^2 manque. La condition pour qu'elle ait ses quatre racines imaginaires est aisément fournie par le théorème de Sturm. La voici

$$256r - 27q^3 > 0,$$

ou, ce qui revient au même,

$$(6) \quad r > 3 \left(\frac{q}{4} \right)^{\frac{4}{3}}.$$

D'autre part, l'inégalité (5) se réduit, pour $p = 0$, à

$$(7) \quad r > \frac{1+q^2}{4}.$$

D'après ce que nous avons démontré plus haut, l'inégalité (6) doit être une conséquence de l'inégalité (7). C'est ce que nous allons d'abord vérifier, en faisant voir qu'on a toujours

$$\frac{1+q^2}{4} > 3 \left(\frac{q}{4} \right)^{\frac{4}{3}}$$

ou

$$4(1+q^2)^3 - 27q^4 > 0.$$

En effet, si l'on développe le cube et qu'on pose

$$q^2 = z,$$

le premier membre de cette inégalité prend la forme

$$4z^3 - 15z^2 + 12z + 4,$$

et l'on reconnaît que $z = 2$ le réduit à zéro; de plus, le quotient par $z - 2$ est encore annulé pour $z = 2$; en sorte que l'on trouve

$$4z^3 - 15z^2 + 12z + 4 = (z - 2)^2(4z + 1).$$

Par suite, en rétablissant q^2 à la place de z , on voit que l'inégalité précédente peut s'écrire

$$(q^2 - 2)^2(4q^2 + 1) > 0.$$

Sous cette forme, elle est évidemment satisfaite pour toute valeur numérique de q , à l'exception de $q = \pm \sqrt{2}$.

double valeur pour laquelle le premier membre se réduit à zéro. Quand on suppose $q = \pm \sqrt{2}$, les inégalités (6) et (7) s'accordent à donner $\frac{3}{4}$ pour limite inférieure de r .

En résumé, lorsqu'on cherche à construire les racines de l'équation du quatrième degré par l'intersection de la parabole $x^2 = y$ avec un cercle, et qu'on rencontre un cercle imaginaire, l'équation proposée a aussi ses racines imaginaires. Mais cette analyse prouve que la réciproque n'est pas vraie : que si l'équation

$$x^4 + qx + r = 0$$

a ses racines imaginaires, le cercle sera néanmoins réel tant que r aura une valeur positive comprise entre $3 \left(\frac{q}{4}\right)^{\frac{4}{3}}$ et $\frac{1+q^2}{4}$. Ces deux limites coïncident quand on a $q^2 = 2$; et, dans ce cas, pour toute valeur de r supérieure à $\frac{3}{4}$, le cercle et les racines de l'équation proposée sont imaginaires à la fois.