NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

P.-A.-G. COLOMBIER

Solution de la question 394

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 16 (1857), p. 447-448

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1857_1_16__447_1>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1857, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques

http://www.numdam.org/

SOLUTION DE LA QUESTION 394

(voir page 312);

PAR M. P.-A.-G. COLOMBIER,
Licencié ès Sciences, Professeur à Paris.

Soient

$$m_1, \quad m_2, \quad m_3, \quad m_4$$

les coefficients angulaires de quatre diamètres formant le premier faisceau, et

$$\mu_1, \quad \mu_2, \quad \mu_3, \quad \mu_4$$

les coefficients angulaires respectifs des quatre diamètres conjugués formant le second faisceau. Ces huit coefficients sont tels, que l'on a

$$m_1 \mu_1 = m_2 \mu_2 = m_3 \mu_3 = m_4 \mu_4 = \mp \frac{b^2}{a^2};$$

le signe supérieur se rapporte à l'ellipse et le signe inférieur à l'hyperbole, a et b sont les demi-axes de la conique considérée.

On sait que le rapport anharmonique de quatre droites concourantes en un même point est égal au rapport anharmonique des quatre points qu'une transversale quelconque détermine sur ces quatre droites. On sait aussi que ce dernier rapport est le même que le rapport anharmonique des projections de ces quatre points sur une droite quelconque, sur l'axe des x par exemple.

Cela posé, l'équation d'une transversale étant représentée par

$$y = px + q,$$

désignons par

$$x_1, \quad x_2, \quad x_3, \quad x_4,$$

les abscisses des points d'intersection qu'elle détermine sur les droites du premier faisceau. On a

$$x_1 = \frac{q}{m_1 - p}, \quad x_2 = \frac{q}{m_2 - p}, \quad x_3 = \frac{q}{m_3 - p}, \quad x_4 = \frac{q}{m_4 - p}.$$

Le rapport anharmonique du premier faisceau est égal à

$$\frac{(x_1 - x_4)(x_3 - x_2)}{(x_1 - x_2)(x_3 - x_4)}.$$

Remplaçons x_1, x_2, x_3, x_4 par leurs valeurs, ce qui donne

$$\frac{(m_4 - m_1)(m_2 - m_3)}{(m_4 - m_3)(m_2 - m_1)}.$$

D'après la symétrie des calculs, on voit que le rapport anharmonique du second faisceau est égal à

$$\frac{(\mu_4 - \mu_1)(\mu_2 - \mu_3)}{(\mu_4 - \mu_3)(\mu_2 - \mu_1)}.$$

Si l'on remplace dans ce rapport μ_1, μ_2, μ_3, μ_4 par leurs valeurs en fonction de m_1, m_2, m_3, m_4, on reconnaît après quelques simplifications que le rapport anharmonique du premier faisceau est égal au rapport anharmonique du second. C. Q. F. D.

Note du Rédacteur. Ce théorème est un corollaire de ce théorème : Soient une conique et un faisceau; chaque rayon du faisceau coupe la conique en deux points ; le faisceau qui passe par ces points d'intersection et qui a pour sommet un point quelconque de la conique est un faisceau en *involution*. Les rayons qui passent par les deux points d'intersection d'un même rayon du premier faisceau avec la conique sont des rayons *correspondants*. M. de Jonquières fait mention de ce théorème, mais pour les diamètres conjugués seulement. On en déduit intuitivement le théorème général.