Nouvelles annales de mathématiques

Gerono

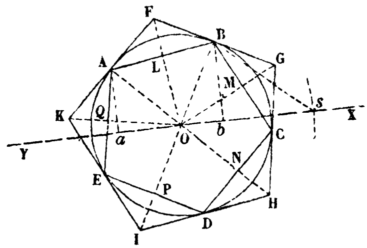
Note sur une proposition de géométrie élémentaire

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 16 (1857), p. 444-447

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1857_1_16__444_0>

NOTE SUR UNE PROPOSITION DE GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE.

Théorème. *La somme algébrique des perpendiculaires abaissées des sommets d'un polygone régulier* ABCDE *sur une droite* XY *menée par le centre* O *du polygone est nulle, quelle que soit la direction de la droite.*



Lorsque le nombre des côtés du polygone est pair, les perpendiculaires abaissées de ses sommets sur une droite quelconque passant par le centre sont deux à deux égales et de signes contraires, il est alors évident que leur somme est nulle. Il n'y a donc lieu à démonstration que dans le cas où le nombre des côtés est impair. Toutefois, la démonstration suivante s'applique indistinctement aux deux cas.

Par les sommets A, B, C, D, E je mène des tangentes à la circonférence circonscrite au polygone considéré. Cette construction détermine un nouveau polygone régulier FGHIK semblable au premier et circonscrit au cercle dont le rayon est OA. Ensuite, je conduis les droites OF, OG, OH, OI, OK qui passent par les milieux L, M, N, P, Q des côtés du polygone inscrit. Puis je nomme :

s la somme des perpendiculaires abaissées sur la droite XY des sommets du polygone inscrit ;

s' la somme des perpendiculaires abaissées sur XY des sommets du polygone circonscrit;

s'' la somme des perpendiculaires menées à la même droite par les points L, M, N, P, Q.

Comme les sommets du polygone ABCDE sont les milieux des côtés du polygone FGHIK, on aura

$$s = s',$$

et de même

$$s'' = s,$$

puisque les points L, M, N, P, Q sont les milieux des côtés du polygone ABCDE.

Il est d'ailleurs facile de reconnaître qu'en désignant par α le rapport des lignes OF, OL, on aura aussi

$$s' = s'' \times \alpha.$$

Car le rapport des perpendiculaires abaissées des points F et L sur XY sera égal à α. Et le même rapport existera entre les perpendiculaires menées par les points G, M, puisque

$$\frac{\mathrm{OG}}{\mathrm{OM}} = \frac{\mathrm{OF}}{\mathrm{OL}} = \alpha.$$

Et ainsi de suite. Donc

$$s' = s''.\alpha.$$

Si maintenant on substitue s à s' et à s'' dans l'égalité

$$s' = s''.\alpha,$$

il viendra

$$s = s.\alpha,$$

d'où

$$(\alpha - 1)s = 0.$$

Mais $\alpha - 1$ n'est pas nul, donc

$$s = 0.$$

La proposition est ainsi démontrée, quel que soit le nombre des sommets du polygone considéré.

Corollaire I. *La somme algébrique des projections des rayons* OA, OB,..., OE *sur un axe rectiligne* XY *passant par le centre* O *est nulle;* car ces projections sont précisément égales aux perpendiculaires abaissées des points A, B,..., E sur un second axe rectiligne mené par le centre et perpendiculaire au premier XY.

Corollaire II. *Si l'on décrit avec un rayon quelconque une circonférence ayant le même centre que le polygone régulier, la somme des carrés des distances des sommets du polygone à un point quelconque de cette circonférence sera une quantité constante.*

En effet, nommons r le rayon OA du polygone; n le nombre de ses côtés; r' le rayon de la circonférence décrite; S un point quelconque de cette circonférence. Et concevons que des différents sommets du polygone on ait mené des droites au point S, et qu'on ait projeté sur l'axe OS les rayons OA, OB, etc. En désignant par Oa, Ob,... ces projections, les triangles OAS, OBS, etc., donneront

$$\overline{AS}^2 = r^2 + r'^2 \pm 2r'\, Oa, \quad \overline{BS}^2 = r^2 + r'^2 \pm 2r'.Ob, \ldots,$$

ou plus simplement

$$\overline{AS}^2 = r^2 + r'^2 + 2r'.Oa, \quad \overline{BS}^2 = r^2 + r'^2 + 2r'.Ob, \ldots,$$

en convenant de considérer les projections Oa, Ob, etc., comme positives ou négatives suivant qu'elles seront dirigées en sens contraire de OS ou dans le même sens que OS.

Si l'on additionne toutes ces égalités, dont le nombre est n, en ayant égard à ce que la somme algébrique des projections OA, OB, etc., est nulle (corollaire I), on aura

$$\overline{AS}^2 + \overline{BS}^2 + \ldots = n\,(r^2 + r'^2).$$

Cette dernière égalité montre que la somme des carrés des distances des sommets A, B, etc., au point S, est indépendante de la position de ce point sur la circonférence décrite.

G.