

MARCEL JOZON

**Seconde solution d'une question
proposée aux examens d'admission
à l'École polytechnique**

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 16
(1857), p. 430-433

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1857_1_16__430_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1857, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

SECONDE SOLUTION D'UNE QUESTION

Proposée aux examens d'admission à l'École Polytechnique

(voir page 376),

PAR M. MARCEL JOZON,
Élève du lycée Louis-le-Grand

Trouver le nombre des racines réelles qu'admet l'équation

$$x = A \sin x + B$$

pour chaque système de valeurs des coefficients A et B, et effectuer la séparation de toutes ces racines.

Application à l'équation $x = 3142 \sin x + 157$.

La valeur maximum de $\sin x$ étant 1, la valeur maximum de $A \sin x + B$ est $A + B$; de même la valeur minimum de ce binôme correspond à $\sin x = -1$ et est $-A + B$. (A est supposé positif. S'il ne l'était pas, on changerait les signes.) Il résulte de là : 1° que toutes les valeurs de x satisfaisant à l'équation sont comprises entre $-A + B$ et $+A + B$; 2° que le nombre des racines est impair, car pour toute valeur de x inférieure à $-A + B$, le premier membre de l'équation

$$x - A \sin x - B = 0$$

devient négatif, et, pour toute valeur de x supérieure à $A + B$, le premier membre de cette même équation devient positif.

On voit de plus que si deux valeurs x_1 et $x_1 + \pi$ comprises entre $-A + B$ et $+A + B$ sont telles que

$$\sin x_1 = \pm 1,$$

elles donnent des résultats de signes contraires (*) lorsqu'on les substitue à x dans le premier membre de l'équation

$$x - A \sin x - B = 0,$$

et que par conséquent elles comprennent une racine. De plus, dans cet intervalle de x_1 à $x_1 + \pi$, la dérivée $1 - A \cos x$ s'annule au plus une fois; il n'y a donc qu'une seule racine comprise entre x_1 et $x_1 + \pi$ (**).

Donc si l'on a la fois

$$\sin(-A + B) = \pm 1$$

et

$$\sin(A + B) = \pm 1 (***)$$

il y aura autant de racines comprises entre $-A + B$ et $A + B$, qu'il y a de demi-circonférences dans la différence $2A$ de ces arcs.

Si $-A + B$ et $A + B$ ne vérifient l'équation ni l'un ni l'autre, le nombre des racines sera exactement $\frac{2A}{\pi}$.

Si $-A + B$ est racine, $A + B$ ne l'étant pas, le nombre des solutions est $\frac{2A}{\pi} + 1$. Enfin ce nombre est $\frac{2A}{\pi} + 2$, quand $-A + B$ et $A + B$ sont racines.

Pour ramener le cas général à celui-là, on pose

$$-A + B = \frac{2n + 1}{2} \pi - \alpha = C - \alpha,$$

la nombre α étant plus petit que π , et de même

$$A + B = \frac{2n' + 1}{2} \pi + \beta = D + \beta.$$

(*) Car $\sin(x_1 + \pi) = -\sin x_1$.

Tm.

(**) Car cette quantité ne peut dans cet intervalle passer du positif au négatif qu'une seule fois.

-Tm.

(***) Cela revient à $\sin x_1 = \pm 1$.

Tm.

Le nombre des racines comprises entre C et D est $\left(\frac{D-C}{\pi}\right)$.

Maintenant si $\sin C = +1$, il y a une racine comprise entre $C - \alpha$ et C, car pour $x = C - \alpha$, $x - A \sin x - D$ devient négatif, et pour $x = C$ il est positif.

Si au contraire $\sin C = -1$, il n'y a pas de solutions comprises entre $C - \alpha$ et C.

On verrait de même que si $\sin D = -1$, il y a une racine comprise entre D et $D + \beta$, et que si $\sin D = +1$, il n'y en a pas. Le nombre des racines peut donc être

$$\frac{D-C}{\pi}, \quad \frac{D-C}{\pi} + 1 \quad \text{ou} \quad \frac{D-C}{\pi} + 2.$$

On a donc ainsi le nombre des racines. Quant à leur séparation, elle se trouve naturellement effectuée, puisque l'on sait qu'entre deux arcs $\frac{2n-1}{2}\pi$ et $\frac{2n+1}{2}\pi$ compris entre les limites extrêmes $-A+B$ et $A+B$, il y a une racine de l'équation et une seule.

Application à l'équation $x = 3142 \sin x + 157$.

Ici

$$A = 3142 = 1000\pi, \quad B = 157 = 50\pi;$$

donc

$$-A + B = -950\pi = \left(-950 + \frac{1}{2}\right)\pi - \frac{\pi}{2}$$

et

$$A + B = 1050\pi = \left(1050 - \frac{1}{2}\right)\pi + \frac{\pi}{2}.$$

Il y aura donc déjà $1050 - \frac{1}{2} + 950 - \frac{1}{2}$ ou 1999 racines comprises entre $\left(-950 + \frac{1}{2}\right)\pi$ et $\left(1050 - \frac{1}{2}\right)\pi$.

De plus, le sinus de $\left(-950 + \frac{1}{2}\right) \pi$ étant positif, il y a une racine entre -950π et $\left(-950 + \frac{1}{2}\right) \pi$, et de même, le sinus de $\left(1050 - \frac{1}{2}\right) \pi$ étant négatif, il y a une racine comprise entre $\left(1050 - \frac{1}{2}\right) \pi$ et 1050π .

Il y aura donc en tout $1999 + 2$ ou 2001 racines, connues à une demi-circonférence près, à l'exception de la première et de la dernière qui sont connues à un quart de circonférence près.

Note du Rédacteur. La première solution (p. 376) est usitée dans les services publics, lorsqu'on n'a besoin de connaître approximativement que quelques racines; le procédé graphique est alors plus expéditif que le calcul.