Géométrie algorithmique sur les polygones inscrits et circonscrits à des coniques ; d'après M. Brioschi

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 16 (1857), p. 421-428

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1857_1_16__421_1>

GÉOMÉTRIE ALGORITHMIQUE.

Sur les polygones inscrits et circonscrits à des coniques ;

D'APRÈS M. BRIOSCHI.

Ann. de Tortolini, 1857.

1. *Lemme.* Soient u, v, w trois fonctions linéaires à

deux variables :

$$\begin{aligned}
U &= \alpha vw + \beta wu + \gamma uv,\\
V &= l^2u^2 + m^2v^2 + n^2w^2 - avw - bwu - cuv,\\
tU - V &= vw(t\alpha + a) + wu(t\beta + b) + uv(t\gamma + c)\\
&\qquad - l^2u^2 - m^2v^2 - n^2w^2,
\end{aligned}$$

α, β, γ,..., a, b, c,... sont des constantes données et t une constante arbitraire égalant à zéro les trois dérivées de $tU - V$ prises par rapport à u, v, w; on obtient

$$\begin{aligned}
w(t\beta + b) + v(t\gamma + c) - 2l^2u &= 0,\\
w(t\alpha + a) - 2vm^2 + (t\gamma + c)u &= 0,\\
-2n^2w + v(t\alpha + a) + (t\beta + b)u &= 0.
\end{aligned}$$

Pour que ces trois équations subsistent simultanément, il faut que le déterminant soit nul; ce déterminant, qu'on nomme le *discriminant* de la fonction $tU - V$ est

$$a_0t^3 + a_1t^2 + a_2t + a_3 = 0,$$

où

$$\begin{aligned}
a_0 &= \alpha\beta\gamma,\\
a_1 &= l^2\alpha^2 + m^2\beta^2 + n^2\gamma^2 + a\beta\gamma + b\alpha\gamma + c\alpha\beta,\\
a_2 &= 2a\alpha l^2 + 2b\beta m^2 + 2c\gamma n^2 + \alpha bc + \beta ca + \gamma ab,\\
a_3 &= l^2a^2 + m^2b^2 + n^2c^2 + abc - 4l^2m^2n^2.
\end{aligned}$$

2. L'intersection de la droite $u = 0$, avec la conique $tU - V = 0$, donne

$$m^2v^2 + n^2w^2 - vw(t\alpha + a) = 0.$$

Lorsque cette équation est un carré parfait, la droite $u = 0$ est tangente à la conique, ce qui donne

$$t = \frac{2mn - a}{\alpha}.$$

Désignons cette valeur particulière de t par t_1, nous avons donc

$$a = 2mn - \alpha t_1.$$

Désignons de même par t_2, t_3 les valeurs particulières de t qui rendent les droites $v = 0$, $w = 0$ tangentes même aux deux coniques $t_2 U - V = 0$, $t_3 U - V = 0$, nous avons les trois équations

$$a = 2mn - \alpha t_1,$$
$$b = 2nl - \beta t_2,$$
$$c = 2lm - \gamma t_3.$$

En posant

$$U = 0,$$

le triangle u, v, w est inscrit dans cette conique et circonscrit aux trois coniques :

$$t_1 U - V = 0,$$
$$t_2 U - V = 0,$$
$$t_3 U - V = 0.$$

3. Substituons ces valeurs de a, b, c dans les coefficients du discriminant, on obtient

$$a_0 = \alpha\beta\gamma,$$
$$a_1 = p^2 - \alpha\beta\gamma(t_1 + t_2 + t_3),$$
$$a_2 = 2pq + \alpha\beta\gamma(t_1 t_2 + t_2 t_3 + t_3 t_1),$$
$$a_3 = q^2 - \alpha\beta\gamma\, t_1 t_2 t_3,$$

où

$$p = l\alpha + m\beta + n\gamma,$$
$$q = 4r - l\alpha t_1 - m\beta t_2 - n\gamma t_3,$$
$$r = lmn.$$

Soit

$$(1)\quad (t - t_1)(t - t_2)(t - t_3) = t^3 + At^2 + Bt + C = 0;$$

d'après les propriétés d'Albert Girard, on a les relations

(2) $p^2 = a_1 - a_0 A, \quad 2pq = a_2 - a_0 B, \quad q^2 = a_3 - a_0 C;$

d'où l'on déduit

$$4(a_1 - a_0 A)(a_3 - a_0 C) = (a_2 - a_0 B)^2,$$

relation qui a été donnée aussi par MM. Cayley et Salmon, mais par d'autres raisonnements.

4. On a, d'après les équations (2),

$$p^2 t^2 + 2pqt + q^2 = (pt + q)^2 = a_0 t^3 + a_1 t^2 + a_2 t + a_3$$
$$= a_0 (t - t_1) t - t_2)(t - t_3) \text{ (*)};$$

car cette équation est satisfaite par les trois racines t_1, t_2, t_3, et en développant, on a

$$pt + q = \sqrt{a_0 t^3 + a_1 t^2 + a_2 t + a_3}$$
$$= A_0 + A_1 t + A_2 t^2 + A_3 t^3 + \ldots = F(t),$$

ce qui donne

$$A_0^2 = a_3,$$
$$2A_0 A_1 = a_2,$$
$$A_1^2 + 2A_1 A_2 = a_1,$$
$$A_1^3 + 2A_1 A_2 + 2A_0 A_3 = a_0 \ldots,$$
$$pt_1 + q = A_0 + A_1 t_1 + A_2 t_1^2 + A_3 t_1^3 \ldots,$$
$$pt_2 + q = A_0 + A_1 t_2 + A_2 t_2^2 + A_3 t_2^3 \ldots,$$
$$p = A_1 + A_2 (t_2 - t_1) + A_3 (t_2^2 - t_1 t_2 + t_1^2) \ldots,$$
$$q = A_0 - t_1 t_2 P,$$

ou

$$P = A_2 + A_3 (t_1 + t_2) + A_4 (t_1^2 + t_2^2 + t_1 t_2) + \ldots.$$

La troisième des équations (2) donne

$$q^2 = a_3 - a_0 t_1 t_2 t_3 = A_0^2 - 2A_0 t_1 t_2 P + t_1^2 t_2^2 P^2;$$
$$a_0 b_1 t_2 = a_0 (A_0 - q),$$

(*) Il suffit de remplacer dans l'équation $t^3 + At^2 + Bt + C = 0$, A, B, C par les valeurs en p, q, a_0, etc. TM.

donc

$$t_3 = \frac{a_3 - q^2}{a_0\, t_1\, t_2},$$

d'où

$$t_3 = \frac{1}{a_0}(t_1 t_2 \mathrm{P}^2 - 2\,\mathrm{A}_0 \mathrm{P}).$$

Si l'on pose $t_1 = t_2 = 0$, ou si $a = 2mn$, $b = 2nl$; alors les droites $u = 0$, $v = 0$ inscrites dans $\mathrm{U} = 0$ sont tangentes à $\mathrm{V} = 0$ et à la conique $t_3 \mathrm{U} - \mathrm{V} = 0$; or alors

$$(3) \qquad t_3 = -\frac{2\,\mathrm{A}_0 \mathrm{A}_2}{a_0} = \frac{a_2^2 - 4 a_1 a_3}{4\, a_0 a_3}.$$

Le troisième côté $w = 0$ est donc tangent à la conique $(a_2^2 - 4 a_1 a_3)\mathrm{U} - 4 a_0 a_3 \mathrm{V} = 0$, et si $a_2^2 = 4 a_1 a_3$, le triangle u, v, w sera à la fois inscrit à la conique $\mathrm{U} = 0$ et circonscrit à la conique $\mathrm{V} = 0$, et lorsque les trois conditions $a = 2mn$, $b = 2nl$, $a_2^2 = 4 a_1 a_3$ subsistent, un triangle circonscrit à V ayant deux côtés inscrits dans U et circonscrit à V aura de même le troisième côté.

5. Soit seulement

$$t_1 = 0\,;$$

alors

$$\mathrm{P} = \mathrm{A}_2 + \mathrm{A}_3 t_2 + \mathrm{A}_4 t_2^2 + \ldots,$$

$u = 0$ est tangent à la conique $\mathrm{V} = 0$, et

$$\begin{aligned}
a_0 t_3 &= -2\,\mathrm{A}_0(\mathrm{A}_2 + \mathrm{A}_3 t_2 + \mathrm{A}_4 t_2^2 + \ldots),\\
a_0 t_2^2 t_3 &= -2\,\mathrm{A}_0(\mathrm{A}_2 t_2^2 + \mathrm{A}_3{}_2^3 + \mathrm{A}_4 t_2^4 + \ldots)\\
&= -2\,\mathrm{A}_0[\mathrm{A}_0 + \mathrm{A}_1 t_2 - (\mathrm{A}_0 + \mathrm{A}_1 t^2 + \mathrm{A}_2 t_2^2 + \ldots)]\\
&= -2\,\mathrm{A}_0[\mathrm{A}_0 + \mathrm{A}_1 t_2 - \mathrm{F}(t_2)] \ (\textit{voir } \text{p. } 424),
\end{aligned}$$

$$a_0 t_2^2 t_3 - 2\,\mathrm{A}_0(\mathrm{A}_0 + \mathrm{A}_1 t_2) = -2\,\mathrm{A}_0 \mathrm{F}(t_2);$$

élevant au carré

$$\begin{aligned}
&a_0^2 t_2^4 t_3^2 - 4 a_0 \mathrm{A}_0 t_2^2 t_3 (\mathrm{A}_0 + \mathrm{A}_1 t_2)\\
&= 4\mathrm{A}_0^2 \{[\mathrm{F}(t_2)]^2 - (\mathrm{A}_0 + \mathrm{A}_1 t_2)^2\},
\end{aligned}$$

mais

$$2 A_0 A_1 = a_2, \qquad A_1^2 = \frac{a_2^2}{4a_3},$$

d'où

$$F(t_2)^2 - (A_0 + A_1 t_2)^2 = \frac{t_2^2}{4a_3}(4 a_0 a_3 t_2 + 4 a_1 a_3 - a_2^2).$$

Substituant et réduisant, on obtient

$$(4) \quad a_0^2 t_2^2 t_3^2 - 4 a_0 a_3 t_3 - 2 a_0 a_2 t_2 t_3 = 4 a_0 a_3 t_2 + 4 a_1 a_3 - a_2^2,$$

si l'on avait aussi

$$t_2 = 0,$$

on retombe sur la valeur de t_3 trouvée ci-desus (3).

6. Soit le quadrilatère *abcd* inscrit dans la conique $U = 0$, et dont trois côtés *ab*, *bc*, *cd* sont circonscrits à la conique $V = 0$.

Dans le triangle *abc*, les côtés *ab*, *bc* sont tangents à la conique $V = 0$ et inscrits dans la conique $U = 0$. Donc, d'après ce qui précède, le troisième côté *ac* sera tangent à la conique $\alpha U - V = 0$, ou

$$(3) \qquad \alpha = \frac{a_2^2 - 4a_1 a_3}{4 a_0 a_3}.$$

Dans le triangle *acd*, le côté *cd* est tangent à la conique $U = 0$, le côté *ac* tangent à la conique $\alpha U - V = 0$, le troisième côté *ad* sera tangent à la conique $t_3 U - V = 0$, si l'on a la relation (4), dans laquelle il faut remplacer t_2 par la valeur de α, et l'on obtient

$$t_3 = \frac{16 a_3 (8 a_0 a_3^2 + a_2^3 - 4 a_1 a_2 a_3)}{(a_2^2 - 4 a_1 a_3)^2}.$$

Ainsi le quatrième coté sera tangent à la conique

$$16 a_3 (8 a_0 a_3^2 + a_2^3 + 4 a_1 a_2 a_3) U - (a_2^2 - 4 a_1 a_3)^2 V = 0,$$

et si l'on a

$$8a_0a_3^2 + a_3^2 - 4a_1a_2a_3 = 0,$$

le quadrilatère sera à la fois inscrit dans $U = 0$ et circonscrit à $V = 0$. Même observation que ci-dessus.

7. Soit le pentagone $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$ inscrit dans la conique $U = 0$, et supposons que les côtés $\alpha_1\alpha_2$, $\alpha_2\alpha_3$, $\alpha_3\alpha_4$, $\alpha_4\alpha_5$ soient tangents à la conique $V = 0$, le côté $\alpha_5\alpha_1$ sera tangent à la conique $t_5U - V = 0$. Il s'agit de trouver t_5.

Dans le triangle $\alpha_1\alpha_3\alpha_4$, le côté $\alpha_3\alpha_4$ est tangent à V, on a donc entre t_3 et t_4 la relation (4)

$$a_0^2t_3^2t_4^2 - 4a_0a_3t_4 - 2a_0a_2t_3t_4 = 4a_0a_3t_3 + 4a_1a_3 - a_2^2.$$

Dans le triangle $\alpha_1\alpha_4\alpha_5$, le côté $\alpha_4\alpha_5$ est tangent à la conique $V = 0$, on a donc encore

$$a_0^2t_4^2t_5^2 - 4a_0a_3t_5 - 2a_0a_2t_4t_5 = 4a_0a_3t_4 + 4a_1a_3 - a_2^2.$$

Soustrayant on a

$$a_0^2t_4^2(t_5 + t_3) = 4a_0a_3 + 2a_0a_2t_4.$$

La première des équations donne

$$a_0^2t_5t_4^2t_3 = a_2^2 - 4a_1a_3 - 4a_0a_3t_4,$$

d'où

$$t_5 = \frac{4a_0a_2(\alpha - t_4)}{a_0^2t_3t_4^2}.$$

On connaît t_3 et t_4, par conséquent t_5, et de même pour les polygones de tout nombre de côtés.

Observation. Ce magnifique travail est, à ce que je sache, la démonstration analytique la plus simple qu'on ait donnée du célèbre théorème de M. Poncelet; généralisation du théorème pour deux cercles, auquel le théorème général peut être ramené, puisque, d'après un autre théorème de M. Poncelet, deux coniques sont les perspectives de deux cercles. La précédente analyse résout cette question : un polygone de n côtés étant inscrit dans une conique; $n-1$ des côtés étant respectivement des tangentes à un faisceau de $n-1$ coniques passant par les mêmes quatre points, trouver la $n^{ième}$ conique du faisceau qui soit touchée par le $n^{ième}$ côté du polygone; or l'on peut trouver les conditions pour que le faisceau de n coniques se condense en une seule conique, l'on a donc le problème Poncelet. Jacobi a rattaché cette recherche aux fonctions elliptiques (*Nouvelles Annales,* t. IV, p. 377).