

GERONO

Formule d'Abel (fin d'un premier article)

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 16 (1857), p. 398-400

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1857_1_16__398_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1857, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

FORMULE D'ABEL (Fin d'un premier article)

(voir page 237).

En supposant

$$a = -x,$$

la formule (1) (p. 237) donne

$$(2) \left\{ \begin{aligned} 0 &= x^{m-1} - m(x + \epsilon)^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1.2} (x + 2\epsilon)^{m-1} \\ &\quad - \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3} (x + 3\epsilon)^{m-1} + \dots \\ &\quad \mp m[x + (m-1)\epsilon]^{m-1} \pm (x + m\epsilon)^{m-1}. \end{aligned} \right.$$

Si dans cette dernière on remplace x par $x + \epsilon$ et qu'on change les signes des termes de l'équation résultante, il viendra

$$(3) \left\{ \begin{aligned} 0 &= -(x + \epsilon)^{m-1} + m(x + 2\epsilon)^{m-1} - \frac{m(m-1)}{1.2} (x + 3\epsilon)^{m-1} \\ &\quad + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3} (x + 4\epsilon)^{m-1} - \dots \\ &\quad \pm m(x + m\epsilon)^{m-1} \mp [x + (m+1)\epsilon]^{m-1}. \end{aligned} \right.$$

En additionnant les égalités (2) et (3), on trouve

$$(4) \left\{ \begin{aligned} 0 &= x^{m-1} - (m+1)(x + \epsilon)^{m-1} + \frac{(m+1)m}{1.2} (x + 2\epsilon)^{m-1} \\ &\quad - \frac{(m+1)m(m-1)}{1.2.3} (x + 3\epsilon)^{m-1} + \dots \\ &\quad \pm (m+1)(x + m\epsilon)^{m-1} \mp [x + (m+1)\epsilon]^{m-1}. \end{aligned} \right.$$

En faisant le même calcul sur l'équation (4), on trouvera évidemment

$$\begin{aligned} 0 &= x^{m-1} - (m+2)(x + \epsilon)^{m-1} + \frac{(m+2)(m+1)}{1.2} (x + 2\epsilon)^{m-1} \\ &\quad - \frac{(m+2)(m+1)m}{1.2.3} (x + 3\epsilon)^{m-1} + \dots \\ &\quad \mp (m+2)[x + (m+1)\epsilon]^{m-1} \pm [x + (m+2)\epsilon]^{m-1}, \end{aligned}$$

et ainsi de suite. On a donc généralement, en désignant

par n un nombre entier quelconque plus grand que m ,

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} 0 = x^m - n(x + \epsilon)^m + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} (x + 2\epsilon)^m \\ \quad - \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} (x + 3\epsilon)^m + \dots \\ \quad \mp n[x + (n-1)\epsilon]^m \pm (x + n\epsilon)^m; \end{array} \right.$$

ce qui établit une relation entre les puissances semblables des termes d'une progression arithmétique, en admettant toutefois que le nombre de ces termes surpasse de deux unités, au moins, le degré de la puissance qui leur est commune (*).

Si l'on pose

$$x = 0 \quad \text{et} \quad \epsilon = 1,$$

l'équation (5) devient

$$0 = n^m - n(n-1)^m + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} (n-2)^m \\ - \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} (n-3)^m + \dots,$$

formule connue, que nous n'avons rappelée ici qu'afin de montrer qu'elle est implicitement comprise dans la formule d'Abel.

(*) Le second membre de l'équation (5) est, au signe près, la différence $n^{\text{ième}}$ de la fonction x^m dans laquelle on donne à la variable des accroissements successifs égaux à ϵ . Or on suppose $n > m$, donc cette différence doit être nulle quelles que soient les valeurs de x et de ϵ .