GERONO

Question d’examen (École navale)

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 16 (1857), p. 393-394

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1857_1_16__393_1>

QUESTION D'EXAMEN (ÉCOLE NAVALE).

Le produit de quatre nombres entiers consécutifs ne peut être un carré.

Soit $(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)$ le produit considéré.

On a

$$(n+1)(n+4) = n^2 + 5n + 4$$

et

$$(n+2)(n+3) = n^2 + 5n + 6;$$

donc

$$(n+2)(n+3) = (n+1)(n+4) + 2.$$

D'ailleurs $(n+1)(n+4)$ est en nombre pair.

En posant

$$(n+1)(n+4) = 2p,$$

il viendra

$$(n+2)(n+3) = 2p + 2 = 2(p+1),$$

et, par suite,

$$\begin{aligned}(n+1)(n+2)(n+3)(n+4) &= 2p \times 2(p+1)\\ &= 4p(p+1).\end{aligned}$$

Or le produit $p(p+1)$ de deux nombres entiers consécutifs ne peut être un carré; donc il en est de même de $4p(p+1)$ ou du produit $n(n+1)(n+2)(n+3)$ de quatre nombres entiers consécutifs. G.

Remarque. En admettant ce principe que : *si* p *est un nombre premier, il y a au moins un autre nombre premier compris entre* p *et* 2p, il est clair que le produit $1.2.3\ldots n$ ne peut être un carré; car en désignant par p le plus grand nombre premier de la suite $1, 2, 3,\ldots, n$, on aura $n < 2p$, et, par conséquent, le nombre premier p n'entrera qu'à la première puissance dans le produit $1.2.3\ldots n$; donc ce produit ne sera pas un carré. G.