

J.-CH. DUPAIN

## **Solution de la question 384**

*Nouvelles annales de mathématiques 1<sup>re</sup> série*, tome 16  
(1857), p. 337-340

[http://www.numdam.org/item?id=NAM\\_1857\\_1\\_16\\_\\_337\\_1](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1857_1_16__337_1)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1857, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

---

**SOLUTION DE LA QUESTION 384**

(voir t. XVI, p. 182);

PAR M. J-CH. DUPAIN,

Ancien élève de l'Ecole Normale.

---

La droite qui joint les extrémités des deux aiguilles  
d'une montre change à chaque instant de longueur et de

*Ann. de Mathémat.*, t. XVI. (Septembre 1857.)

direction. Trouver l'équation de la ligne décrite par le milieu M de cette droite.

Soient  $2a$ ,  $2b$  les longueurs des aiguilles, et  $a < b$ . Je prends pour origine le centre du cadran et pour axé des  $y$  la ligne de midi. La pointe de la petite aiguille a pour coordonnées

$$2a \sin ht, \quad 2a \cos ht$$

en posant

$$h = \frac{\pi}{21600^s}.$$

La pointe de la grande aiguille a pour coordonnées

$$2b \sin kt, \quad 2b \cos kt$$

en posant

$$k = \frac{\pi}{1800^s}.$$

Les coordonnées du point M sont moyennes arithmétiques entre celles des pointes des aiguilles

$$(1) \quad \begin{cases} x = a \sin ht + b \sin kt, \\ y = a \cos ht + b \cos kt. \end{cases}$$

Si l'on voulait les coordonnées polaires du point M, on aurait

$$(2) \quad \begin{cases} r^2 = a^2 + b^2 + 2ab \cos(kt - ht), \\ \text{tang } \theta = \frac{a \cos ht + b \cos kt}{a \sin ht + b \sin kt}. \end{cases}$$

L'inspection des équations (1) montre que le point M peut être censé décrire la circonférence d'un cercle dont le centre est mobile sur une autre circonférence; l'une d'elles indifféremment aurait pour rayon  $a$  et l'autre  $b$ : les deux mouvements sont uniformes et dans le sens de la marche des aiguilles.

Le lieu cherché est donc une épicycloïde que l'on peut

concevoir décrite par le mouvement d'un cercle de rayon  $\left(\frac{k-h}{k}\right)b$  ou  $\frac{11}{12}b$  roulant sur un cercle fixe de rayon  $\frac{h}{k}b$  ou  $\frac{b}{12}$  et entraînant avec lui le point M situé à une distance  $a$  de son centre.

Il est très-facile de trouver la vitesse absolue du point M. En effet

$$v^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{dt^2},$$

$$v^2 = a^2 h^2 + b^2 k^2 + 2 abkh \cos(kt - ht).$$

La vitesse est maximum lorsque les deux aiguilles font un angle nul, et elle est minimum lorsque cet angle est de 180 degrés. (Il en est de même du rayon vecteur.) La vitesse ne pourrait devenir nulle que si  $ah = bk$ , cas particulier que nous avons exclu en posant

$$a < b.$$

L'aire décrite par le rayon vecteur OM a pour différentielle

$$\frac{1}{2}(x dy - y dx)$$

$$= \frac{1}{2}[-a^2 h - b^2 k - ab(k+h) \cos(kt - ht)] dt;$$

elle est d'ailleurs égale à  $\frac{1}{2}r^2 d\theta$ : on aura donc, pour la vitesse angulaire,

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{-a^2 h - b^2 k - ab(k+h) \cos(kt - ht)}{a^2 + b^2 + 2ab \cos(kt - ht)}.$$

Examinons si elle peut être nulle. Il faut pour cela que

$$\cos(kt - ht) = -\frac{a^2 h + b^2 k}{ab(k+h)},$$

condition impossible si le second membre est numériquement supérieur à 1, c'est-à-dire si  $\frac{k}{h} > \frac{a}{b}$  ou  $12 > \frac{a}{b}$ ; dans ce cas, la vitesse angulaire conserve toujours son signe et l'épicycloïde est allongée. Elle serait raccourcie si  $12$  égalait  $\frac{a}{b}$ ; et enfin elle serait ordinaire si  $12 < \frac{a}{b}$ .

L'angle du rayon vecteur et de la tangente a pour tangente trigonométrique

$$\frac{rd\theta}{dr} \quad \text{ou} \quad \frac{r^2 d\theta}{rdr}.$$

Le numérateur de cette fraction est déjà calculé et son dénominateur est la moitié de la dérivée de  $r^2$ , c'est-à-dire

$$ab(k - h) \sin(kt - ht).$$

Pour terminer, je vais rapporter la trajectoire à des axes mobiles autour du centre du cadran avec une vitesse angulaire égale et opposée à celle de la petite aiguille. L'angle  $x'ox$  sera  $-ht$ , et, en appliquant les formules ordinaires de transformation,

$$x' = b \sin(kt - ht),$$

$$y' = a + b \cos(kt - ht),$$

d'où

$$x'^2 + (y' - a)^2 = b^2.$$

Dans le mouvement relatif aux axes mobiles, la trajectoire est un cercle ayant pour rayon la moitié de la grande aiguille et pour ordonnée du centre la moitié de la petite aiguille. Le mouvement est d'ailleurs uniforme. La pointe de la petite aiguille est un centre de similitude des cercles décrits par le point M et par la pointe de la grande aiguille, résultats faciles à prévoir.