

MANNHEIM

Construction de la tangente, du point de contact d'une droite avec son enveloppe pour certains lieux géométriques. Applications à la détermination du centre de courbure des coniques

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 16 (1857), p. 322-332

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1857_1_16__322_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1857, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

CONSTRUCTION DE LA TANGENTE,

Du point de contact d'une droite avec son enveloppe pour certains lieux géométriques.

Applications à la détermination du centre de courbure des coniques ;

PAR M. MANNHEIM.

1. Soient o_1 et o_2 (*) deux circonférences se coupant aux points c, f . Par le point c , menons une droite arbitraire qui coupe la circonférence o_1 au point a et la circonférence o_2 au point b ; sur ab , construisons un triangle abd semblable à un triangle donné: le lieu décrit par le point d lorsque la droite ab tourne autour du point c , est une circonférence o_3 passant par le point f (**).

2. Au point a menons la tangente T_1 à la circonférence o_1 et au point b la tangente T_2 à la circonférence o_2 . T_1 et T_2 se coupent au point i ; la circonférence aib passe par le point f . En menant au point d la tangente T_3 à la circonférence o_3 , on obtiendra de même deux autres circonférences se coupant en f .

3. Dans le cas particulier où le point d est en d_1 sur ab , de telle façon que $\frac{ad_1}{d_1b} = \text{constante}$, le lieu des points

(*) On est prie de faire la figure. Il est commode de placer le point d de façon que le point f soit à l'intérieur du triangle abd .

(**) Je ne démontre pas ce théorème, que l'on énonce plus complètement de la manière suivante :

Sur les droites telles que ab on construit des figures semblables à une figure donnée, les points homologues décrivent des circonférences passant par le point f , les côtés homologues tournent autour de points fixes

d_1 est la circonférence o_1 passant en c et en f (*).

Observation. Nous conserverons toujours d pour le cas général et d_1 pour le cas particulier.

4. T_1 étant la tangente en d_1 à la circonférence o_1 , le point f est commun aux circonférences circonscrites aux quatre triangles déterminés par les droites T_1 , T_2 , T_3 et ab .

Cette remarque permet de résoudre la question suivante :

5. Pour un mouvement infiniment petit d'une droite ab , le point a parcourt un élément d'une droite T_1 , le point b un élément d'une droite T_2 , le point d_1 , qui partage ab dans un rapport constant, un élément d'une droite T_3 ; on demande autour de quel point la droite ab a tourné.

On détermine le point f en circonscrivant des circonférences aux quatre triangles formés par les droites T_1 , T_2 , T_3 et ab ; on décrit une circonférence passant par le point f et tangente en d_1 à la droite T_3 : cette circonférence coupe la droite ab au point cherché.

6. Revenons au cas général (1). Au point a traçons une courbe quelconque L tangente à la circonférence o_1 , au point b une courbe quelconque M tangente à o_2 , au point c une courbe quelconque H tangente à ab . Lorsque la droite ab se meut en restant tangente à la courbe H , ses extrémités parcourant les courbes L , M , le sommet d du triangle abd construit sur ab et semblable à un triangle

(*) Si l'on transforme cette proposition par la méthode des rayons vecteurs réciproques en prenant le point c pour pôle de transformation, on retrouve une proposition connue. Cette dernière proposition est un cas particulier de celle qui résulte de la transformation de (1), le point c étant toujours pris pour pôle de transformation.

donné, décrit une courbe N dont on obtient la tangente au point d de la manière suivante : Par le point de contact c de ab et de H , on décrit une circonférence o_1 tangente à L au point a , et une circonférence o_2 tangente à M au point b ; o_1 coupe ad en e , o_2 coupe bd en g . Les quatre points d, e, f, g sont sur une même circonférence o_3 . On mène au point d la tangente T_3 à cette circonférence et l'on a la tangente cherchée.

7. Réciproquement, connaissant T_3 , on peut déterminer c en s'appuyant sur ce qu'on a dit plus haut (2).

8. Dans le cas particulier où l'on considère le point d_1 (3), les points e, g se confondent en c , et l'on a la circonférence o_4 passant par les points cd pour déterminer la tangente T_4 au lieu décrit par le point d_1 (*).

9. Les circonférences o_1, o_2 et o_4 passent par les mêmes deux points c, f .

Dans ces circonférences, les extrémités a', d'_1, b' des diamètres qui passent par les points a, d_1, b sont sur une droite ca' perpendiculaire à la droite acb ; on a d'après (3)

$$\frac{a'd'_1}{d'_1b'} = \frac{ad_1}{d_1b}.$$

Les diamètres aa', bb' sont connus, puisque ce sont les normales aux courbes L, M . On déterminera le point d'_1 , et, par suite, d' d_1 qui est normale à la courbe décrite par d_1 (**).

10. Réciproquement, connaissant T_4 , on peut déter-

(*) Pour déterminer T_4 , on peut remplacer les courbes L, M par leurs tangentes T_1, T_2 ; le lieu décrit par le point d_1 est alors une hyperbole dont les asymptotes sont parallèles aux droites T_1, T_2 ; on détermine ces asymptotes, et, par suite, T_4 .

(**) Pour un mouvement infiniment petit de ab , les normales aux courbes décrites par tous les points tels que d_1 enveloppent une parabole tangente aux droites ca, ca' .

miner c comme on l'a dit (§) en remplaçant les courbes données par leurs tangentes.

On peut aussi tracer les normales aa' , $d_1d'_1$, bb' , puis chercher une droite perpendiculaire à ab qui soit coupée par ces normales aux points a' , d'_1 , b' , de façon que

$$\frac{a'd'_1}{d'_1b'} = \frac{ad_1}{d_1b}.$$

Cette droite, qu'il est facile de déterminer, coupe ab au point cherché.

Remarque. Soit j le point de rencontre de aa' et de bb' , menons jd'_1 et abaïssons du point j une perpendiculaire sur ab ; cette perpendiculaire, les droites ja , jb et jd'_1 forment un faisceau dont le rapport anharmonique est $\frac{ad_1}{d_1b}$.

II. On déduit de la proposition suivante plusieurs constructions pour obtenir le point c .

PROBLÈME. *Trois droites T_1 , T_2 , T_4 étant données, on mène une droite ab qui coupe T_1 au point a , T_2 au point b et T_4 au point d_1 ; on a*

$$\frac{ad_1}{d_1b} = \text{constante.}$$

On demande l'enveloppe de ab et le point c où elle touche son enveloppe (Géom. sup., p. 552).

Solution. Soient t et t' les points où T_4 coupe T_1 et T_2 . On a

$$\frac{ad_1}{d_1b} = \frac{ta \sin(T_1, T_4)}{t'b \sin(T_2, T_4)},$$

d'où

$$\frac{ta}{t'b} = \text{constante.}$$

L'enveloppe de ab est donc une parabole tangente aux trois droites données.

Pour déterminer c , on a

$$\frac{ac}{cd_1} = \frac{ib}{bt'}, \quad \frac{cd_1}{d_1b} = \frac{at}{ti}.$$

D'où les constructions suivantes :

1°. Du point d_1 on mène une parallèle à T_2 , cette droite coupe tb en un certain point; de ce point on mène une parallèle à T_1 qui coupe ab au point cherché. On a une construction analogue en menant at' , etc.

2°. Par le point t on mène une parallèle à ab , par le point a une parallèle à T_2 , ces deux droites se coupent en un certain point, la droite qui le joint au point t' coupe ab au point c . De même en menant par le point t' une parallèle à ab , etc.

3°. Par le point b on mène une parallèle à T_4 , cette droite coupe id_1 en un certain point; de ce point on mène une parallèle à T_1 qui coupe ab au point c . De même pour le point a , etc.

4°. Par le point b on mène une parallèle à T_1 , cette droite coupe at' en un certain point; de ce point on mène une parallèle à T_4 qui coupe ab au point c . De même pour le point a , etc.

Ces constructions, à l'exception de la dernière, donnent T_4 en opérant inversement.

12. Lorsque la courbe L se confond avec H , le point a' est le centre de courbure de la courbe H et la circonférence o_1 est décrite sur le rayon de courbure comme diamètre.

Cette remarque permet de déterminer la tangente au lieu décrit par le sommet de triangles semblables construits sur la portion de tangente comprise entre son point de contact et un point où elle coupe une courbe

quelconque, et, par suite, à la courbe décrite par un point qui partage cette portion de tangente dans un rapport constant. Réciproquement, connaissant cette tangente, on peut déterminer le centre de courbure de la courbe H.

Applications à la recherche des centres de courbure des coniques ().*

13. Soient A et B le grand axe et le petit axe d'une ellipse, o le centre de l'ellipse, *m* un point quelconque de cette courbe, T et N la tangente et la normale passant en ce point.

T coupe A au point *t* et B au point *t'*,

N coupe A au point *n* et B au point *n'*.

On sait que $\frac{mn}{m'n'}$ est constant.

Pour un mouvement infiniment petit de N, *n* parcourt A, *n'* parcourt B et *m* parcourt T; on demande le point autour duquel la droite N a tourné, c'est-à-dire le centre de courbure (δ).

Il faut pour cela chercher le point *f* en circonscrivant des circonférences aux triangles déterminés par les droites A, B, T, N, puis décrire par ce point une circonférence tangente à T au point *m*; cette circonférence coupe N au point cherché.

Il n'est pas même nécessaire de décrire aucune circonférence. En effet le point *f* est le point de rencontre de *tm'* et de *t'n* comme il est facile de le voir en remarquant que les angles (T, N) et (A, B) sont droits. On joint le point *f* au point *m*, on élève *fc* perpendiculaire à *fm*, le point

(*) *Théorie géométrique des rayons et centres de courbure*, in-8 de 84 p; 1857. M. Ernest Lamarle détermine les centres de courbure par un mouvement de rotation analogue au mouvement de translation de Roberval pour les tangentes. Quel moyen cinématique employer pour les auscultations d'ordre supérieur? Tm.

de rencontre c de cette ligne et de N est le centre de courbure cherché.

14. Le point f est le foyer de la parabole tangente aux droites A, B, T, N ; l'angle (T, N) étant droit, le point m est un point de la directrice de cette parabole, et, par suite, c est le point où cette courbe touche N .

On peut déduire de là que :

La parabole tangente aux axes d'une ellipse à la tangente et à la normale passant par un point donné touche cette normale au centre de courbure de l'ellipse.

15. La circonférence cfm coupe tn' en f' ,

$$\widehat{cf'n'} = \widehat{cmf} = \widehat{otn'},$$

donc cf' est parallèle à A , et, par suite, mf' à B , ce qui donne une nouvelle construction du centre de courbure. On peut aussi considérer le point de rencontre f'' de la circonférence cfm et de $t'n$, la droite mf'' est parallèle à A et cf'' à B (*).

16. Par le point n on mène B' parallèle à B ; par le point n' , A' parallèle à A . Il faut, pour obtenir c (10) mener une droite parallèle à T et qui soit partagée par N, A', B' dans le rapport $\frac{mn}{mn'}$.

La construction se réduit à mener par le point l , intersection de B' et de tn' , une parallèle à T . Cette droite coupe N au centre de courbure.

(*) J'étais arrivé depuis longtemps à ce résultat en construisant directement l'abscisse du centre de courbure $\xi = \frac{c^3 x^3}{a^2}$.

Soit q le point où mf'' , parallèle à A , coupe B , on a

$$\frac{qf''}{on} = \frac{qm}{ot} \quad \text{ou} \quad \frac{\xi}{c^3 x} = \frac{x}{a^2},$$

d'où etc

17. Ce que l'on vient de dire (14, 15, 16) peut se conclure du n° 11 ; on peut en outre déterminer c à l'aide des autres constructions indiquées dans ce numéro.

18. A partir du point m sur N je porte $ms = ms' =$ le demi-diamètre conjugué de om .

On sait que os est égal à la demi-somme des axes et que os' est égal à leur demi-différence. Pour un mouvement infiniment petit de N , les points s, s' décrivent des arcs de cercle et le point m , milieu de ss' , un élément de T ; les normales à ces trois courbes sont os, os' et N . En appliquant la remarque du n° 10, on conclut que oc, os, os' et la perpendiculaire abaissée du point O sur N forment un faisceau harmonique. On a donc

$$\rho = \frac{d^2}{h},$$

en appelant ρ le rayon de courbure mc , h la distance du point o à T et d le demi-diamètre conjugué de om . Cette expression de ρ est connue, nous la retrouverons plus loin comme cas particulier.

19. Une droite ab , corde d'une certaine courbe N , détache de cette courbe un segment d'aire constante; on demande, pour une position de ab , le centre de courbure de la courbe enveloppée par cette corde.

Au milieu de ab on élève une perpendiculaire, on prend le milieu de la portion de cette droite comprise entre les points où elle est coupée par les normales menées à la courbe N aux points a, b ; ce point milieu est le centre de courbure cherché (12).

Comme cas particulier, on a l'hyperbole lorsque la courbe N se réduit à deux droites.

Voici un autre cas particulier :

Soient une ellipse dont le centre est o (*), m un point de la courbe et T la tangente en ce point. A partir du point m sur T , on porte deux longueurs égales ma , mb . On peut considérer ab comme la corde d'une ellipse semblable à o ; la corde détachant un segment d'aire constante, le point m décrit l'ellipse donnée; on peut donc appliquer la construction précédente. Pour obtenir les normales aux points a et b , on opérera de la manière suivante.

Au point a on mène la tangente aa' à l'ellipse donnée, a' est le point de contact, la perpendiculaire abaissée du point a sur ma' est la normale cherchée; de même pour le point b . Les deux normales coupent la normale au point m , etc.

De cette construction, on déduira facilement ce qui suit :

Au point a on mène une parallèle à mb' , au point b une parallèle à ma' , ces deux droites se coupent en un certain point; H désigne la distance de ce point à T . D étant la longueur ma , on a

$$\rho = \frac{D^2}{H}.$$

Dans le cas particulier où D est égal au demi-paramètre conjugué de om , la construction précédente se simplifie et l'expression du rayon de courbure devient celle qui a été donnée (18).

20. On peut chercher le centre de courbure de la parabole en s'appuyant sur cette propriété que la tangente au sommet partage en deux parties égales la portion de tangente comprise entre la courbe et l'axe.

21. Soit bfc un triangle rectangle mobile et variable dont le sommet de l'angle droit est fixe en f et dont l'hÿ-

(*) On est prie de faire une figure particulière.

poténuse bc est tangente à une circonférence donnée o . Le point c est le point de contact mobile; on demande la normale au lieu décrit par le point b .

Le milieu a de bc décrit une droite, axe radical de f et de o .

A l'aide de cette remarque, on trouvera facilement la construction suivante :

Par le point a on mène une parallèle à fo ; cette droite, perpendiculaire à l'axe radical, coupe le rayon oc au point a' . On prolonge oa' d'une longueur égale à elle-même jusqu'en b' , bb' est la normale cherchée.

$b'a$ prolongée coupe of au point e et l'on a

$$b'a = ae.$$

Cette remarque nous sera utile.

22. Considérons une conique ayant pour cercle osculateur la circonférence o de la question précédente et pour foyer le point f .

Le point b parcourt la directrice, on connaît donc bb' . bb' coupe la normale co au point b' , joignons ce point au point a , milieu de bc , prolongeons $b'a$ d'une longueur égale à elle-même jusqu'en e .

Les droites ef et $b'c$ se coupent au centre de courbure.

On peut facilement transformer cette construction de la manière suivante : Du point c on abaisse une perpendiculaire sur la directrice, au b on élève une perpendiculaire à bc , ces deux droites se coupent en un point d , df coupe la normale co au centre de courbure.

Cette construction est applicable aux trois coniques.

En considérant la seconde directrice, on obtient une nouvelle droite passant par le centre de courbure. On est ainsi conduit à la construction suivante :

On élève une perpendiculaire à la tangente au point où elle coupe l'axe parallèle aux directrices; cette droite

coupe la parallèle cg à l'autre axe au point g . La droite qui joint g au centre de la conique coupe la normale au centre de courbure cherché.

23. Pour terminer, énonçons quelques questions que l'on traitera facilement :

1°. On donne trois courbes A, B, C et un point fixe o par lequel on mène une transversale arbitraire qui coupe les courbes aux points a, b, c ; on prend sur cette transversale un point d tel, que $\frac{cd}{ab} = \text{constante}$. On demande la tangente au lieu décrit par le point d (*).

Comme cas particulier, on a la conchoïde du cercle, la cissoïde de Dioclès, etc.

Si la courbe C se réduit au point o et si les lignes A et B sont droites, le rapport $\frac{od}{ab}$ étant 1, le lieu des points d est une hyperbole; on a alors la construction suivante qui nous a été donnée par M. Moutard.

Soit f le point de rencontre de A et B ; on prolonge fb d'une longueur égale à elle-même jusqu'en g , dg est la tangente cherchée. On applique cette construction dans le cas où les lignes A et B sont quelconques en les remplaçant par leurs tangentes.

2°. Étant données deux droites A, B et une courbe C , d'un point de la courbe on mène des parallèles aux droites fixes, on joint les points a, b où ces parallèles coupent A, B ; on demande le point où ab touche son enveloppe.

3°. On partage le rayon de courbure d'une courbe donnée dans un rapport constant; ces différents points déterminent une courbe dont on demande de construire la normale.

(*) Les points a doivent être consécutifs sur la courbe A ; de même les points b, c .