

LEBESGUE

Sur l'aire du triangle sphérique

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 16
(1857), p. 319-321

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1857_1_16__319_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1857, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

SUR L'AIRE DU TRIANGLE SPHÉRIQUE;

PAR M. LEBESGUE.

Soient a, b, c les côtés, A, B, C les angles et S la surface d'un triangle sphérique. L'équation

$$S = A + B + C - \pi$$

donne d'abord

$$\begin{aligned} \cos \frac{S}{2} &= \sin \left(\frac{A + B + C}{2} \right) \\ &= \sin \left(\frac{A + B}{2} \right) \cos \frac{c}{2} + \cos \left(\frac{A + B}{2} \right) \sin \frac{c}{2}; \end{aligned}$$

simplifiant par les valeurs de sin et cos de $\frac{A + B}{2}$, formule de Delambre, il vient d'abord

$$(1) \quad \cos \frac{S}{2} = \frac{1}{\cos \frac{c}{2}} \left(\cos \frac{a}{2} \cos \frac{b}{2} + \sin \frac{a}{2} \sin \frac{b}{2} \cos C \right),$$

puis, en éliminant $\cos C$,

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} \cos \frac{S}{2} &= \frac{\cos a + \cos b + \cos c + 1}{4 \cos \frac{a}{2} \cos \frac{b}{2} \cos \frac{c}{2}} \\ &= \frac{\cos^2 \frac{a}{2} + \cos^2 \frac{b}{2} + \cos^2 \frac{c}{2} - 1}{2 \cos \frac{a}{2} \cos \frac{b}{2} \cos \frac{c}{2}}. \end{aligned} \right.$$

Or on a

$$1 - (\cos^2 a + \cos^2 b + \cos^2 c) + 2 \cos a \cos b \cos c$$

et

$$-1 + \cos^2 a + \cos^2 b + \cos^2 c + 2 \cos a \cos b \cos c$$

égaux respectivement à

$$4 \sin \left(\frac{a+b+c}{2} \right) \sin \left(\frac{-a+b+c}{2} \right) \sin \left(\frac{a-b+c}{2} \right) \sin \left(\frac{a+b-c}{2} \right),$$

$$4 \cos \left(\frac{a+b+c}{2} \right) \cos \left(\frac{-a+b+c}{2} \right) \cos \left(\frac{a-b+c}{2} \right) \cos \left(\frac{a+b-c}{2} \right).$$

Il résulte de là que

$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned} \operatorname{tang}^2 \frac{S}{4} &= \frac{1 - \cos \frac{S}{2}}{1 + \cos \frac{S}{2}} \\ &= \operatorname{tang} \left(\frac{a+b+c}{4} \right) \operatorname{tang} \left(\frac{-a+b+c}{4} \right) \operatorname{tang} \left(\frac{a-b+c}{4} \right) \operatorname{tang} \left(\frac{a+b-c}{4} \right) \end{aligned} \right.$$

c'est la formule de Lhuilier.

Si l'on représente par α, β, γ les arcs de grand cercle qui unissent les milieux des côtés a, b, c , on déduit de l'équation (1), à cause de

$$\cos \gamma = \cos \frac{a}{2} \cos \frac{b}{2} + \sin \frac{a}{2} \sin \frac{b}{2} \cos C,$$

les suivantes :

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \cos \gamma = \cos \frac{S}{2} \cos \frac{c}{2}, \\ \cos \beta = \cos \frac{S}{2} \cos \frac{b}{2}, \\ \cos \alpha = \cos \frac{S}{2} \cos \frac{a}{2}. \end{array} \right.$$

Si nous représentons par A' , B' , C' les milieux des côtés a , b , c , on sait que le volume V' du parallépipède, dont les deux arêtes contiguës sont OA' , OB' , OC' (O étant le centre de la sphère), est donné par l'équation

$$\begin{aligned} V'^2 &= 1 - (\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma) + 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma \\ &= 1 - \cos^2 \frac{S}{2} \left(\cos^2 \frac{a}{2} + \cos^2 \frac{b}{2} + \cos^2 \frac{c}{2} \right) \\ &\quad + 2 \cos \frac{a}{2} \cos \frac{b}{2} \cos \frac{c}{2} \cos^3 \frac{S}{2}. \end{aligned}$$

Mais l'équation (2) donne

$$\cos^2 \frac{a}{2} + \cos^2 \frac{b}{2} + \cos^2 \frac{c}{2} - 2 \cos \frac{a}{2} \cos \frac{b}{2} \cos \frac{c}{2} \cos \frac{S}{2} = 1;$$

de sorte qu'on a

$$(5) \quad V'^2 = 1 - \cos^2 \frac{S}{2} = \sin^2 \frac{S}{2} \quad \text{ou} \quad V' = \sin \frac{S}{2}.$$

Ce théorème est de M. Cornélius Keogh, qui a fait d'ingénieuses recherches sur la trigonométrie.

Cette expression du volume V' montre bien que le nom de sinus de l'angle solide $OA'B'C'$ donné à V' est mal choisi. Il a été employé par M. Staudt, avec lequel M. Keogh s'est rencontré dans des recherches relatives aux polygones.