

**Note sur la polaire réciproque d'une conique  
et d'une surface du second degré**

*Nouvelles annales de mathématiques 1<sup>re</sup> série*, tome 16  
(1857), p. 264-266

[http://www.numdam.org/item?id=NAM\\_1857\\_1\\_16\\_\\_264\\_0](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1857_1_16__264_0)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1857, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques*

<http://www.numdam.org/>

## NOTE

Sur la polaire réciproque d'une conique et d'une surface du second degré.

1. Soient données cette équation rendue homogène d'une conique

$$(1) \quad \begin{cases} a_{11} x_1^2 + 2a_{12} x_1 x_2 + 2a_{13} x_1 x_3 \\ \quad + a_{22} x_2^2 + 2a_{23} x_2 x_3 + a_{33} x_3^2 = 0, \end{cases}$$

$\frac{x_1}{x_3}, \frac{x_2}{x_3}$  sont les coordonnées courantes, et l'équation

$$\varphi = 0$$

rendue homogène de la conique directrice, l'équation de la polaire réciproque de la conique (1) est donnée par ce déterminant

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \frac{d\varphi}{dx_1} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \frac{d\varphi}{dx_2} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \frac{d\varphi}{dx_3} \\ \frac{d\varphi}{dx_1} & \frac{d\varphi}{dx_2} & \frac{d\varphi}{dx_3} & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

$\frac{d\varphi}{dx_1}$  est la dérivée de  $\varphi$  relativement à  $x_1$ , etc., et où

$$a_{21} = a_{12}, \quad a_{32} = a_{23}, \quad a_{31} = a_{13};$$

car ce déterminant a pour résultat l'équation (a) du tome VII, page 413 des *Nouvelles Annales*.

*Observation.* Si

$$\varphi = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0,$$

il suffit de remplacer dans le déterminant  $\frac{d\varphi}{dx_1}, \frac{d\varphi}{dx_2}, \frac{d\varphi}{dx_3}$  par  $x_1, x_2, x_3$  (voir Brioschi, *Théorie des Déterminants*, traduction française, p. 47). On a omis de dire que la directrice est

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0.$$

2. Soient données cette équation rendue homogène d'une surface du second degré

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{14}x_1x_4 + a_{22}x_2^2 \\ \quad + 2a_{23}x_2x_3 + 2a_{24}x_2x_4 + a_{33}x_3^2 + 2a_{34}x_3x_4 \\ \quad + a_{44}x_4^2 = 0, \end{array} \right.$$

$\frac{x_1}{x_4}, \frac{x_2}{x_4}, \frac{x_3}{x_4}$  sont les coordonnées courantes, et l'équation

$$\varphi = 0$$

rendue homogène de la surface directrice.

L'équation de la polaire réciproque de la surface (2) est donnée par ce déterminant

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \frac{d\varphi}{dx_1} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \frac{d\varphi}{dx_2} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & \frac{d\varphi}{dx_3} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & \frac{d\varphi}{dx_4} \\ \frac{d\varphi}{dx_1} & \frac{d\varphi}{dx_2} & \frac{d\varphi}{dx_3} & \frac{d\varphi}{dx_4} & 0 \end{vmatrix} = 0$$

ou

$$a_{21} = a_{12}, \quad a_{32} = a_{23}, \dots$$

*Observation.* Si

$$\varphi = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 0,$$

il suffit de remplacer dans le déterminant  $\frac{d\varphi}{dx_1}, \frac{d\varphi}{dx_2}, \frac{d\varphi}{dx_3}, \frac{d\varphi}{dx_4}$  par  $x_1, x_2, x_3, x_4$ .

*Remarque.* Les fonctions *quadratiques* homogènes à  $n$  variables sont représentées par ce symbole

$$\sum_r \sum_s a_{r,s} x_r x_s,$$

en donnant à  $r$  et  $s$  toutes les valeurs de la suite 1, 2, 3, ...,  $n$  et posant

$$a_{sr} = a_{rs}.$$

Ainsi pour  $n = 3$ , on donne à  $r$  et  $s$  les valeurs successives 1, 2, 3 et l'on obtient l'équation (1).

Pour  $n = 4$ , on donne à  $r$  et  $s$  les valeurs successives 1, 2, 3, 4 et l'on obtient l'équation (2).

Une fonction quadratique homogène à  $n$  termes variables renferme donc  $\frac{n(n+1)}{2}$  termes.