NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

Note sur la polaire réciproque d'une conique et d'une surface du second degré

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 16 (1857), p. 264-266

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1857_1_16__264_0>

NOTE

Sur la polaire réciproque d'une conique et d'une surface du second degré.

1. Soient données cette équation rendue homogène d'une conique

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} & a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 \\ & \quad + a_{22}x_2^2 + 2a_{23}x_2x_3 + a_{33}x_3^2 = 0, \end{aligned}\right.$$

$\frac{x_1}{x_3}$, $\frac{x_2}{x_3}$ sont les coordonnées courantes, et l'équation

$$\varphi = 0$$

rendue homogène de la conique directrice, l'équation de la polaire réciproque de la conique (1) est donnée par ce déterminant

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \frac{d\varphi}{dx_1} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \frac{d\varphi}{dx_2} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \frac{d\varphi}{dx_3} \\ \frac{d\varphi}{dx_1} & \frac{d\varphi}{dx_2} & \frac{d\varphi}{dx_3} & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

$\frac{d\varphi}{dx_1}$ est la dérivée de φ relativement à x_1, etc., et où

$$a_{21} = a_{12}, \quad a_{32} = a_{23}, \quad a_{31} = a_{13};$$

car ce déterminant a pour résultat l'équation (a) du tome VII, page 413 des *Nouvelles Annales*.

Observation. Si

$$\varphi = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0,$$

il suffit de remplacer dans le déterminant $\frac{d\varphi}{dx_1}, \frac{d\varphi}{dx_2}, \frac{d\varphi}{dx_3}$ par x_1, x_2, x_3 (*voir* Brioschi, *Théorie des Déterminants*, traduction française, p. 47). On a omis de dire que la directrice est

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0.$$

2. Soient données cette équation rendue homogène d'une surface du second degré

$$(2)\quad \left\{ \begin{aligned} & a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{14}x_1x_4 + a_{22}x_2^2 \\ & \quad + 2a_{23}x_2x_3 + 2a_{24}x_2x_4 + a_{33}x_3^2 + 2a_{34}x_3x_4 \\ & \quad + a_{44}x_4^2 = 0, \end{aligned} \right.$$

$\frac{x_1}{x_4}, \frac{x_2}{x_4}, \frac{x_3}{x_4}$ sont les coordonnées courantes, et l'équation

$$\varphi = 0$$

rendue homogène de la surface directrice.

L'équation de la polaire réciproque de la surface (2) est donnée par ce déterminant

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \frac{d\varphi}{dx_1} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \frac{d\varphi}{dx_2} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & \frac{d\varphi}{dx_3} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & \frac{d\varphi}{dx_4} \\ \frac{d\varphi}{dx_1} & \frac{d\varphi}{dx_2} & \frac{d\varphi}{dx_3} & \frac{d\varphi}{dx_4} & 0 \end{vmatrix} = 0$$

ou

$$a_{21} = a_{12}, \quad a_{32} = a_{23}, \ldots$$

Observation. Si

$$\varphi = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 0,$$

il suffit de remplacer dans le déterminant $\frac{d\varphi}{dx_1}$, $\frac{d\varphi}{dx_2}$, $\frac{d\varphi}{dx_3}$, $\frac{d\varphi}{dx_4}$ par x_1, x_2, x_3, x_4.

Remarque. Les fonctions *quadratiques* homogènes à n variables sont représentées par ce symbole

$$\Sigma_r \, \Sigma_s \, a_{r,s} \, x_r \, x_s,$$

en donnant à r et s toutes les valeurs de la suite 1, 2, 3,..., n et posant

$$a_{sr} = a_{rs}.$$

Ainsi pour $n = 3$, on donne à r et s les valeurs successives 1, 2, 3 et l'on obtient l'équation (1).

Pour $n = 4$, on donne à r et s les valeurs successives 1, 2, 3, 4 et l'on obtient l'équation (2).

Une fonction quadratique homogène à n termes variables renferme donc $\frac{n(n+1)}{2}$ termes.