A. PICART

BOURDELLES

Solution de la question 344

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 16 (1857), p. 22-23

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1857_1_16__22_1>

SOLUTION DE LA QUESTION 344

(voir t. XV, p. 383),

PAR MM. A. PICART ET BOURDELLES,
Élèves du lycée Saint-Louis (classe de M. Briot).

Un point fixe O est donné dans un angle plan A. Par O, on mène une transversale rencontrant les côtés de l'angle en B et en C, S et S' étant les aires des triangles OBA, OCA, la somme $\frac{1}{S}+\frac{1}{S'}$ est constante, quelle que soit la manière dont on mène la transversale.

Soient OB', OC' les perpendiculaires abaissées du point O sur les côtés AB, AC. J'aurai

$$\frac{1}{S}+\frac{1}{S'}=\frac{2}{AB.OB'}+\frac{2}{AC.OC'}=\frac{2(AB.OB'+AC.OC')}{AB.AC.OB'.OC'}.$$

Or

$$AB.OB'+AC.OC'=AB.AC\sin A$$

Donc

$$\frac{1}{S} + \frac{1}{S'} = \frac{2\,AB.AC \sin A}{AB.AC.OB'.OC'} = \frac{2 \sin A}{OB'.OC'} = \text{constante}.$$

C. Q. F. D.

On aurait pu du reste arriver à priori à cette expression $\frac{2 \sin A}{OB'.OC'}$ de la constante.

En effet, si je mène la transversale OO' de manière qu'elle soit parallèle à l'un des côtés de l'angle, la somme $\frac{1}{S} + \frac{1}{S'}$ se réduit à $\frac{1}{S}$. Or

$$S = \frac{\overline{AO}^2 \times \sin O'AO \sin OAC}{2 \sin A}.$$

Mais

$$AO \sin O'AO = OB',$$
$$AO \sin OAC' = OC';$$

donc

$$\frac{1}{S} = \frac{2 \sin A}{OB'.OC'}.$$

Il serait facile de voir que le théorème subsiste encore quand la transversale rencontre un côté et le prolongement de l'autre, ou bien encore quand le point O est à l'extérieur de l'angle. Alors la somme se change en différence. L'énoncé général exige qu'on dise la somme *algébrique*.