

J. MENTION

**Considérations analytiques sur les  
surfaces du second ordre**

*Nouvelles annales de mathématiques 1<sup>re</sup> série*, tome 16  
(1857), p. 207-233

[http://www.numdam.org/item?id=NAM\\_1857\\_1\\_16\\_\\_207\\_1](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1857_1_16__207_1)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1857, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

---

**CONSIDÉRATIONS ANALYTIQUES SUR LES SURFACES  
DU SECOND ORDRE;**

PAR M. J. MENTION (\*).

---

La solution de certains problèmes sur les courbes et les surfaces du second ordre exige qu'on laisse aux axes coordonnés la plus grande généralité. Déjà pour les courbes le calcul est fort compliqué et même impossible sans le secours des relations d'identité entre les coefficients de l'équation, qui permettent d'y introduire les simplifications nécessaires. Dans ce cas, M. Terquem a donné des formules générales pour les équations et les coordonnées des droites et points remarquables. Je me propose d'indiquer le moyen de faire une chose semblable pour les surfaces du second ordre.

Parmi les applications de la méthode que je vais exposer, ce Mémoire contiendra des problèmes connus, mais traités avec une étendue complète, et aussi d'autres questions, nouvelles et intéressantes, dont l'examen ne semble pas praticable à l'aide de pures considérations géométriques. Plus tard, j'aurai à envisager les relations d'identité, indépendamment des surfaces, sous le point de vue de l'analyse indéterminée.

I.

NOTATIONS ET RELATIONS D'IDENTITÉ.

1. D'abord je crois bon de rappeler les identités prin-

---

(\*) Maintenant professeur à Saint-Petersbourg.

cipales qu'emploie la théorie des courbes du second ordre (\*).

Soit

$$A y^2 + B xy + C x^2 + D y + E x + F = 0$$

l'équation hexanôme. Posons

$$L = AE^2 - BDE + CD^2 + (B^2 - 4AC) F,$$

$$m = B^2 - 4AC = \frac{dL}{dF},$$

$$k = 2AE - BD = \frac{dL}{dE}, \quad k' = 2CD - BE = \frac{dL}{dD},$$

$$l = D^2 - 4AF = \frac{dL}{dC}, \quad l' = E^2 - 4CF = \frac{dL}{dA},$$

$$n = DE - 2BF = -\frac{dL}{dB}.$$

$m$  et  $L$  ne changent pas avec l'origine des coordonnées. On a les identités

$$k^2 - ml = 4AL, \quad 2kk' + 2mn = -4BL,$$

$$l'^2 - ml' = 4CL, \quad k'l + kn = 2DL,$$

$$kl' + k'n = 2EL, \quad n^2 - ll' = 4FL,$$

$$4L^2 = lk'^2 + l'k^2 + 2nkk' + m(n^2 - ll').$$

Maintenant je prends l'équation des surfaces du second ordre, suivant l'usage, sous la forme

$$\begin{aligned} & Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2B'yz + 2B''xz + 2B'''xy \\ & + 2Cx + 2C'y + 2C''z + E = 0. \end{aligned}$$

(\*) Voir *Nouvelles Annales*, t 1, p 490

Je pose

$$\begin{aligned} L = & A'A''C^2 + AA''C'^2 + AA'C''^2 - B^2C^2 - B'^2C'^2 - B''^2C''^2 \\ & - 2B''A''CC' - 2BAC''C' - 2B'A'CC'' \\ & + 2BB'CC' + 2B'B''C''C' + 2BB''CC'' \\ & + E(AB^2 + A'B'^2 + A''B''^2 - AA'A'' - 2BB'B''), \end{aligned}$$

$$m = AB^2 + A'B'^2 + A''B''^2 - AA'A'' - 2BB'B'' = \frac{dL}{dE},$$

$$k = CA'A'' - B^2C + C'BB' - C''B''A'' + C''BB'' - C''B'A' = \frac{dL}{d(2C)},$$

$$k' = C'AA'' - B'^2C' + C''B'B'' - C''BA + CBB' - CB''A'' = \frac{dL}{d(2C')},$$

$$k'' = C''AA' - B''^2C'' + CBB'' - CB'A' + C'B'B'' - C''BA = \frac{dL}{d(2C'')},$$

$$l = A''C'^2 + A'C''^2 - 2BC''C' + B^2E - EA'A'' = \frac{dL}{dA},$$

$$l' = A''C^2 + AC''^2 - 2B'CC'' + B'^2E - EAA'' = \frac{dL}{dA'},$$

$$l'' = A'C^2 + AC'^2 - 2B''CC' + B''E - EAA'' = \frac{dL}{dA''},$$

$$n = BC^2 + AC''C' - B'CC' - B''CC'' - ABE + B'B''E = -\frac{dL}{d(2B)},$$

$$n' = B'C^2 + A'CC'' - BCC' - B''C''C' - A'B'E + EBB'' = -\frac{dL}{d(2B')},$$

$$n'' = B''C'^2 + A''CC' - B'C''C' - BCC'' - A''B'E + EBB' = -\frac{dL}{d(2B'')},$$

$$\begin{aligned} F = & Ax'^2 + A'y'^2 + A''z'^2 + 2By'y'z' + 2B'x'z' + 2B''x'y' \\ & + 2Cx' + 2C'y' + 2C''z' + E, \end{aligned}$$

$x', y', z'$  étant les coordonnées d'un point quelconque de l'espace.  $m$  et  $L$  ne changent pas avec l'origine

Résolvant en premier lieu l'équation par rapport à  $z$ ,

on a

$$z = \frac{-(By + B'x + C'') \pm \sqrt{\begin{array}{l} y^2 (B^2 - A'A'') + x^2 (B'^2 - AA'') \\ + 2xy(BB' - A''B'') + 2y(BC'' - A''C') \\ + 2x(B'C'' - A''C) + C''^2 - A''E \end{array}}}{2A''}.$$

Les fonctions  $k_1, k'_1, l_1, l'_1, n_1, m_1$  relatives aux courbes du second degré entre les coefficients de la fonction hexanôme comprise sous le radical, seront égales aux fonctions correspondantes de l'équation décanôme multipliées par  $4A''$  : ainsi

$$L_1 = -4A''^2 L (*).$$

J'applique les identités connues, et je remarque qu'on pourrait résoudre par rapport à  $x$  ou  $y$ , ce qui me fournit le tableau ci-dessous :

$$\begin{aligned} k^2 - ml &= -L(B^2 - A'A''), \\ k'^2 - m'l' &= -L(B'^2 - AA''), \\ k''^2 - m'l'' &= -L(B''^2 - AA'), \\ kk' + mn'' &= L(BB' - A''B''), \\ kk'' + mn' &= L(BB'' - A'B'), \\ k'k'' + m'n &= L(B'B'' - AB), \\ k'l + k''l' &= -L(B'C'' - A''C'), \\ kl' + k'n'' &= -L(BC'' - A''C'), \\ kl'' + k'n' &= -L(BC' - A'C''), \\ k''l + k'n &= -L(B''C' - A''C), \\ k'l' + k'n &= -L(B'C - AC''), \\ k''l' + k'n &= -L(B''C - AC'), \end{aligned}$$

(\*) Ainsi

$$\begin{aligned} k_1 &= 4[(B^2 - A'A'')(B'C'' - A''C) - (BB' - A''B'')(BC'' - A''C')] \\ &= -4A''^2 K. \end{aligned}$$

( 211 )

$$n''^2 - l'' = -L(C''^2 - A''E),$$

$$n'^2 - l'' = -L(C'^2 - A'E),$$

$$n^2 - l' = -L(C^2 - AE).$$

2. *Valeurs des coefficients de l'équation au moyen des identités.*

On a

$$(kk' + mn'')^2 - (k^2 - ml)(k'^2 - ml') \\ = L^2[(BB' - A''B'')^2 - (B^2 - A'A'')(B'^2 - AA'')] = L^2A''m,$$

d'où

$$A''L^2 = k^2l' + k'^2l + 2n''kk' + mn''^2 - ml'.$$

De même

$$(kk' + mn'')(kk'' + mn') - (k^2 - ml)(k'k'' + mn) \\ = L^2[(BB'' - A'B'')(BB'' - A'B') - (B^2 - A'A'')(B'B'' - AB)] \\ = -L^2Bm,$$

d'où

$$BL^2 = n(k^2 - ml) - k'(kn' + k''l) - n''(kk'' + mn').$$

de même  $B'L^2$ ,  $B''L^2$ .

Les valeurs de  $C$ ,  $C'$ ,  $C''$  se tirent des trois identités

$$Ak + B'k'' + B''k' + Cm = 0,$$

$$A'k' + Bk'' + B''k + C'm = 0,$$

$$A''k'' + B'k + Bk' + C''m = 0.$$

Quant à celle de  $E$ , on l'obtiendra par les identités

$$-Cl + C'n'' + C''n' = Ek,$$

$$Cn'' - C'l' + C''n = Ek',$$

$$Cn' + C'n'' - C''l'' = Ek''.$$

Enfin de

$$Ck + C'k' + C''k'' + mE = L,$$

on déduit  $L$  en fonction de  $k, k', k'', l, \dots$

Nous pouvons donc former ce nouveau groupe de relations :

$$\begin{aligned}
 \text{AL}^2 &= k'^2 l'' + k''^2 l' + 2n k' k'' + mn^2 - ml' l'', \\
 \text{A}'\text{L}^2 &= k^2 l'' + lk''^2 + 2n' k k'' + mn'^2 - ml'' l'', \\
 \text{A}''\text{L}^2 &= k^2 l' + k'^2 l + 2n'' k k' + mn''^2 - ml'' l', \\
 \text{BL}^2 &= nk^2 - mnl - k k' n' - k' k'' l - n'' k k'' - mn' n'', \\
 \text{B}'\text{L}^2 &= n' k'^2 - mn' l' - k' k'' n'' - k'' k l' - n k k' - mn n'', \\
 \text{B}''\text{L}^2 &= n'' k''^2 - mn'' l'' - k k'' n - k k' l'' - n' k' k'' - mn n', \\
 \text{CL}^2 &= l' l'' k - n^2 k + n n' k' + n n'' k'' + k'' l' n' + k' l'' n'', \\
 \text{C}'\text{L}^2 &= l'' l' k' - n'^2 k' + n n' k + n'' l'' k + n' n'' k'' + l n k'', \\
 \text{C}''\text{L}^2 &= l'' l' k'' - n''^2 k'' + n n'' k + n' n'' k' + k l' n' + k' l n, \\
 \text{EL}^2 &= 2n n' n'' + n''^2 l'' + n'^2 l' + n^2 l - l' l'' l'', \\
 \text{L}^3 &= 2m n n' n'' + m n''^2 l'' + m n'^2 l' + m n^2 l - m l l' l'' \\
 &\quad + 2k k' n n'' + 2k k'' n n'' + 2k' k'' n' n'' - k'^2 n'^2 \\
 &\quad - k''^2 n''^2 - k^2 n^2 + 2n l k'' k + 2n'' l'' k k' \\
 &\quad + 2n' l' k k'' + l'' l' k^2 + l' l'' k'^2.
 \end{aligned}$$

Il existe un grand nombre d'autres identités : nous avons seulement donné les plus importantes. Par la suite, nous donnerons au fur et à mesure celles dont on aura besoin.

3. Il faut encore noter les deux relations suivantes :

1°. Du système d'équations

$$\begin{aligned}
 \alpha x^2 - 2\beta x + \gamma &= 0, \\
 \alpha x\gamma - \varepsilon x - \beta\gamma + \xi &= 0, \\
 \alpha\gamma^2 - 2\varepsilon\gamma + \pi &= 0,
 \end{aligned}$$

on conclut

$$\alpha\pi\gamma - \gamma\varepsilon^2 - \pi\beta^2 - \alpha\xi^2 + 2\beta\varepsilon\xi = 0.$$

2°. Si l'on a les six équations :

$$\alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma' = 0,$$

$$\alpha\alpha'' + \beta\beta'' + \gamma\gamma'' = 0,$$

$$\alpha'\alpha'' + \beta'\beta'' + \gamma'\gamma'' = 0,$$

$$A\alpha^2 + B\alpha\beta + C\beta^2 + D\beta\gamma + E\alpha\gamma + F\gamma^2 = 0,$$

$$A\alpha'^2 + B\alpha'\beta' + C\beta'^2 + D\beta'\gamma' + E\alpha'\gamma' + F\gamma'^2 = 0,$$

$$A\alpha''^2 + B\alpha''\beta'' + C\beta''^2 + D\beta''\gamma'' + E\alpha''\gamma'' + F\gamma''^2 = 0,$$

on a aussi

$$A + C + F = 0.$$

*Démonstration.* On peut évidemment supposer  $\gamma$  et  $\gamma'$ , égaux à l'unité. Alors

$$\alpha\alpha' + \beta\beta' + 1 = 0,$$

$$\alpha\alpha'' + \beta\beta'' + 1 = 0,$$

$$\alpha'\alpha'' + \beta'\beta'' + 1 = 0,$$

$$A\alpha^2 + B\alpha\beta + C\beta^2 + D\beta + E\alpha + F = 0,$$

.....

Les trois premières équations donnent

$$\alpha = \sqrt{\frac{-(1 + \beta\beta')(1 + \beta\beta'')}{1 + \beta'\beta''}},$$

$$\alpha' = \sqrt{\frac{-(1 + \beta\beta')(1 + \beta'\beta'')}{1 + \beta\beta''}}$$

et

$$\alpha'' = \sqrt{\frac{-(1 + \beta\beta'')(1 + \beta'\beta'')}{1 + \beta\beta'}}.$$

Remplaçant  $\alpha$  par sa valeur dans la relation

$$C\beta^2 + A\alpha^2 + D\beta + F = -\alpha(B\beta + E),$$



il vient

$$\begin{aligned} & C\beta^2(1 + \beta'\beta'') - A(1 + \beta\beta')(1 + \beta\beta'') + D\beta(1 + \beta'\beta'') \\ & \quad + F(1 + \beta'\beta'') \\ & = (B\beta + E) \sqrt{-(1 + \beta\beta')(1 + \beta\beta'')(1 + \beta'\beta'')} ; \end{aligned}$$

on a de même

$$\begin{aligned} & C\beta'^2(1 + \beta\beta'') - A(1 + \beta\beta')(1 + \beta'\beta'') + D\beta'(1 + \beta\beta'') \\ & \quad + F(1 + \beta\beta'') \\ & = (B\beta' + E) \sqrt{-(1 + \beta\beta')(1 + \beta\beta'')(1 + \beta'\beta'')} . \end{aligned}$$

Retranchant ces deux équations l'une de l'autre et supprimant le facteur  $\beta - \beta'$ , on obtient

$$\begin{aligned} & C(\beta + \beta') + A\beta'\beta''\beta - C(1 + \beta\beta')\beta'' + D - F\beta'' \\ & = B \sqrt{-(1 + \beta\beta')(1 + \beta\beta'')(1 + \beta'\beta'')} , \end{aligned}$$

et aussi par des moyens semblables

$$\begin{aligned} & C(\beta + \beta'') + A\beta'\beta''\beta - C(1 + \beta\beta'')\beta' + D - F\beta' \\ & = B \sqrt{-(1 + \beta\beta')(1 + \beta\beta'')(1 + \beta'\beta'')} . \end{aligned}$$

Retranchant encore, on obtient

$$(\beta' - \beta'')(A + C + F) = 0 .$$

G. Q. F. D.

## II.

DU PLAN TANGENT, DES AXES PRINCIPAUX.

SECTIONS CIRCULAIRES.

1. Les coordonnées du centre de la surface sont  $\frac{k}{m}$ ,  $\frac{k'}{m}$ ,  $\frac{k''}{m}$ . En y transportant l'origine, l'équation de la surface prend la forme

$$A x^2 + A' y^2 + A'' z^2 + 2B yz + 2B' xz + 2B'' xy = \frac{L}{m} ,$$

parce que

$$A k^2 + A' k'' + A'' k''^2 + 2B k'' k' + 2B' k'' k + 2B'' k k' \\ + 2C k + 2C' k' + 2C'' k'' + m^2 E = L m.$$

Donc si  $L = 0$ , la surface sera conique (\*), et réciproquement.

La direction d'une corde principale étant représentée par  $x = \mu z$ ,  $y = \nu z$ , on aura pour déterminer  $\mu$  et  $\nu$  les équations

$$\frac{A\mu + B' + B''\nu}{\mu + \nu \cos xy + \cos xz} = \frac{A'\nu + B + B''\mu}{\nu + \cos yz + \mu \cos xy} \\ = \frac{A'' + B\nu + B'\mu}{1 + \mu \cos zx + \nu \cos zy}.$$

Si l'on pose

$$A'' + B\nu + B'\mu = s(1 + \mu \cos zx + \nu \cos zy),$$

on parviendra, comme à l'ordinaire, à l'équation cubique

$$(s - A)(s - A')(s - A'') - (s - A')(s \cos zx - B')^2 \\ - (s - A'')(s \cos xy - B'')^2 - (s - A)(s \cos yz - B)^2 \\ + 2(s \cos zy - B)(s \cos zx - B')(s \cos xy - B'') = 0,$$

ou

$$s^3(1 - \cos^2 xy - \cos^2 xz - \cos^2 yz + 2 \cos xy \cos xz \cos zy) \\ - s^2 \begin{bmatrix} A \sin^2 yz + A' \sin^2 zx + A'' \sin^2 xy \\ - 2B'(\cos xz - \cos zy \cos xy) \\ - 2B''(\cos xy - \cos zy \cos xz) \\ - 2B(\cos yz - \cos xy \cos xz) \end{bmatrix} \\ - s \begin{bmatrix} B^2 - A'A'' + B'^2 - AA'' + B''^2 - AA' \\ + 2 \cos xy (A''B'' - BB') + 2 \cos zy (AB - B'B'') \\ + 2 \cos xz (A'B' - BB'') \end{bmatrix} \\ + AB^2 + A'B'^2 + A''B''^2 - AA'A'' - 2BB'B'' = 0.$$

---

(\*) Ce cône est imaginaire lorsque le centre est à l'intérieur de la surface; ellipsoïde. Tm.

Il ne serait pas difficile de montrer que les racines de cette équation sont liées aux longueurs des axes ; mais j'obtiens par une autre voie l'équation ayant pour racines les carrés des demi-axes.

La marche que suit M. Leroy (*Analyse appliquée*, page 197) d'après M. Cauchy pour rechercher à quels caractères on peut reconnaître que la surface est de révolution, est sans contredit d'une extrême simplicité. Or rien n'empêche de la suivre avec des axes obliques. On arrive aux conditions

$$\frac{B}{\cos yz} = \frac{B'}{\cos xz} = \frac{B''}{\cos xy},$$

$$\frac{BA - B'B''}{\cos yz - \cos xz \cos xy} = \frac{B'A' - BB''}{\cos xz - \cos yz \cos xy}$$

$$= \frac{B''A'' - BB'}{\cos xy - \cos xz \cos yz}.$$

Lorsque la corde, au lieu d'être principale, sera simplement conjuguée au plan

$$dy + ex + fz = 0,$$

$\mu$  et  $\nu$  s'expriment comme il suit :

$$\mu = \frac{ef(BB'' - A'B') + ed(BB' - A''B'') - e^2(B^2 - A'A'')}{df(B'B'' - AB) + ef(BB'' - A'B') - f^2(B''^2 - AA')},$$

$$\nu = \frac{df(B'B'' - AB) + de(BB' - A''B'') - d^2(B'^2 - AA'')}{df(B'B'' - AB) + ef(BB'' - A'B') - f^2(B''^2 - AA')}.$$

pour les paraboloides dans lesquels la droite

$$x = \frac{k}{k''} z, \quad y = \frac{k'}{k''} z$$

est parallèle à l'axe, on a

$$\mu = \frac{c}{f} \frac{k}{k''}, \quad \nu = \frac{d}{f} \frac{k'}{k''}.$$

## 2. Coupons la surface par le plan

$$dy + ex + fz + g = 0.$$

L'intersection aura pour projection sur le plan des  $xy$  la courbe

$$\begin{aligned} & y^2 (A' f^2 + A'' d^2 - 2 B df) \\ & + 2xy (B'' f^2 + A'' de - B ef - B' df) \\ & + x^2 (A f^2 + A'' e^2 - 2 B' ef) \\ & + 2y (A'' dg - Bgf + C' f^2 - C'' df) \\ & + 2x (A'' eg - B' gf - C'' ef + C f^2) \\ & + A'' g^2 - 2 C'' gf + E f^2 = 0. \end{aligned}$$

Les fonctions  $m$  et  $L$  relatives à cette courbe sont

$$\begin{aligned} m_1 &= d^2 (B'^2 - AA'') + e^2 (B^2 - A'A'') + f^2 (B''^2 - AA') \\ & + 2 de (A'' B'' - BB') + 2 ef (B' A' - BB'') \\ & + 2 df (AB - B' B''), \\ L_1 &= le^2 + l' d^2 + l'' f^2 + 2 egk + 2 dgk' + 2 gfk'' \\ & + mg^2 - 2 dfn - 2 efn' - 2 den'', \end{aligned}$$

$l, l', l'', k, \dots, n''$  ayant les significations fixés plus haut.

A l'aide de ces expressions, nous pourrions étudier les surfaces du second ordre et avoir leurs caractères spécifiques. Je supprime la discussion dont la place serait plutôt dans une théorie systématique des surfaces du second ordre, que je n'ai pas l'intention d'établir ici.

Quand la *section* se réduira à un point ou au système de deux droites, le plan sera tangent à la surface. Ainsi la relation

$$\begin{aligned} & mg^2 + le^2 + l' d^2 + l'' f^2 + 2 keg + 2 k' dg + 2 k'' gf \\ & - 2 dfn - 2 efn' - 2 aen'' = 0 \end{aligned}$$

représente la condition nécessaire et suffisante (\*) pour le

(\*) Nécessaire, mais non suffisante; le point de contact est imaginaire lorsque  $m$ , et  $L$ , sont négatifs. Tm.

contact du plan

$$dy + ex + fz + g = 0$$

avec la surface du second ordre.

Si  $l = 0$ , ou  $l' = 0$ , ou  $l'' = 0$ , la surface touche un des plans coordonnés.

3. On aura les sections circulaires, en identifiant l'équation se rapportant à la section plane en général avec celle de la projection de l'intersection du plan

$$dy + ex + fz + g = 0$$

et de la sphère

$$\begin{aligned} & (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 + (z - \gamma)^2 \\ & + 2(x - \alpha)(y - \beta) \cos xy + 2(x - \alpha)(z - \gamma) \cos xz \\ & + 2(y - \beta)(z - \gamma) \cos yz = R^2. \end{aligned}$$

Cette projection ayant pour équation

$$\begin{aligned} & y^2(d^2 + f^2 - 2df \cos zy) \\ & + 2xy(f^2 \cos xy + de - ef \cos zy - df \cos xz) \\ & + x^2(f^2 + e^2 - 2ef \cos xz) \\ & + 2y[(\beta + \alpha \cos xy + \gamma \cos yz)f^2 - df(\gamma + \alpha \cos xz + \beta \cos yz)] \\ & + 2x[(\alpha + \beta \cos xy + \gamma \cos xz)f^2 - ef(\gamma + \alpha \cos xz + \beta \cos yz)] \\ & + f^2 \left( \begin{array}{l} \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2\alpha\beta \cos xy + 2\alpha\gamma \cos xz \\ + 2\beta\gamma \cos yz - R^2 \end{array} \right) = 0, \end{aligned}$$

il viendra en identifiant (p. 217)

$$\begin{aligned} d^2 + f^2 - 2df \cos xy &= (A' f^2 + A'' d^2 - 2B df) \lambda, \\ f^2 \cos xy + de - ef \cos zy - df \cos xz \\ &= (B' f^2 + A'' de - Bef - B' df) \lambda, \\ f^2 + e^2 - 2ef \cos xz &= (A f^2 + A'' e^2 - 2B' ef) \lambda, \end{aligned}$$

où  $\lambda$  est un facteur à déterminer.

De là on conclut

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{f^2}(1 - \lambda A'') + 1 - \lambda A' - \frac{2d}{f}(\cos zy - \lambda B) &= 0, \\ \cos yx - \lambda B'' + \frac{d}{f} \frac{e}{f}(1 - \lambda A'') - \frac{e}{f}(\cos zy - \lambda B) \\ &- \frac{d}{f}(\cos xz - \lambda B') = 0, \\ 1 - \lambda A + \frac{e^2}{f^2}(1 - \lambda A'') - \frac{2e}{f}(\cos xz - \lambda B') &= 0. \end{aligned}$$

Donc, en vertu d'une identité, on est conduit à cette équation du troisième degré en  $\lambda$

$$\begin{aligned} (1 - \lambda A)(1 - \lambda A')(1 - \lambda A'') - (1 - \lambda A')(\cos xz - \lambda B')^2 \\ - (1 - \lambda A'')(\cos xy - \lambda B'')^2 - (1 - \lambda A)(\cos yz - \lambda B)^2 \\ + 2(\cos zy - \lambda B)(\cos xz - \lambda B')(\cos xy - \lambda B'') = 0, \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} &\lambda^3(AB^2 + A'B'^2 + A''B''^2 - AA'A'' - 2BB'B'') \\ &- \lambda^2 \left[ \begin{array}{l} B^2 - A'A'' + B'^2 - AA'' + B''^2 - AA' \\ + 2\cos xy(A''B'' - BB') + 2\cos zy(AB - B'B'') \\ + 2\cos xz(A'B' - BB'') \end{array} \right] \\ &- \lambda \left[ \begin{array}{l} A\sin^2 yz + A'\sin^2 xz + A''\sin^2 xy \\ - 2B'(\cos xz - \cos zy \cos xy) \\ - 2B''(\cos xy - \cos zy \cos xz) \\ - 2B(\cos yz - \cos xy \cos xz) \end{array} \right] \\ &+ 1 - \cos^2 xy - \cos^2 xz - \cos^2 yz + 2\cos xy \cos xz \cos yz = 0 \quad (*). \end{aligned}$$

Pour découvrir la signification géométrique de  $\lambda$ , transportons l'origine des coordonnées au centre de la surface, ce qui ne changera pas les coefficients de l'équation du troisième degré, et imaginons que la sphère soit concentrique à la surface. Un raisonnement direct apprend

(\*) Cette dernière expression est le volume du parallépipède qu'on obtient en prenant à partir de l'origine une longueur égale à l'unité sur les trois axes.

(voyez les *Développements de Géométrie* de M. Charles Dupin, page 168) qu'il y a deux sections circulaires ayant pour centre celui de la surface et pour rayon la longueur de l'axe moyen. Mais l'identification fournit

$$\lambda E = -R^2;$$

et, l'origine des coordonnées étant au centre,

$$E = \frac{L}{m}.$$

Donc le carré de l'axe moyen sera racine de l'équation du troisième degré dont l'inconnue deviendrait  $-\lambda \frac{L}{m}$ . On voit de même à priori que les sphères concentriques à la surface et ayant pour rayons les longueurs des axes extrêmes, coupées par leurs plans correspondants, donneraient des cercles ne pouvant appartenir à la surface du second ordre, quoique  $\lambda$  reste toujours réel. Conséquemment, le calcul, qui n'admettait aucune différence entre ces divers cas, doit faire trouver les trois valeurs de  $\lambda$  correspondantes aux axes principaux, et l'équation dont l'inconnue est  $-\lambda \frac{L}{m}$  a bien pour racines les carrés des demi-axes.

Notre déduction s'accorde, au surplus, avec l'énoncé qu'on lit à la page 399, des *Propriétés projectives*.

Ainsi l'équation aux carrés des demi-axes dans le cas le plus général sera

$$\begin{aligned} & \lambda_1^3 + \lambda_1^2 \frac{L}{m^2} [\Sigma (B^2 - A'A'') + \Sigma 2 \cos xy (A'' B'' - BB')] \\ & - \lambda_1 \frac{L^2}{m^3} [\Sigma A \sin^2 yz - \Sigma 2 B (\cos yz - \cos xy \cos xz)] \\ & - \frac{L^3}{m^4} (1 - \cos^2 xy - \cos^2 xz - \cos^2 yz \\ & + 2 \cos xy \cos xz \cos zy) = 0. \end{aligned}$$

On trouve cette équation dans un Mémoire de M. Bé-

rard (*Annales de Gergonne*, t. III) où elle paraît avoir été peu remarquée (\*).

4. PROBLÈME. *Étant donnée l'équation d'un plan, calculer les coordonnées de son pôle.*

L'équation générale du plan polaire d'un point  $(x, y, z)$  étant

$$X(Ax + B'z + B''y + C) + Y(A'y + Bx + B''z + C') + Z(A''z + By + B'x + C'') + Cx + C'y + C''z + E = 0,$$

si

$$dY + eX + fZ + g = 0$$

est l'équation du plan dont on cherche le pôle, les coordonnées de celui-ci satisferont aux trois équations

$$x(Ag - Ce) + y(B'g - C'e) + z(B'g - C''e) = Ee - Cg,$$

$$x(B''g - Cd) + y(A'g - C'd) + z(Bg - C''d) = Ed - C'g,$$

$$x(B'g - Cf) + y(Bg - C'f) + z(A''g - C''f) = Ef - C''g;$$

d'où l'on tire ces valeurs de  $x, y, z$  :

$$x = \frac{el + gk - dn'' - fn'}{mg + ek + dk' + fk''},$$

$$y = \frac{dl' + gk' - en'' - fn}{mg + ek + dk' + fk''},$$

$$z = \frac{fl'' + gk'' - dn' - en}{mg + ek + dk' + fk''}.$$

lorsque  $x, y, z$  sont donnés, on déduit  $\frac{d}{g}, \frac{e}{g}, \frac{f}{g}$ .

### III.

#### DES GÉNÉRATRICES RECTILIGNES ET DU CÔNE CIRCONSCRIT.

##### 1. Soient

$$x = \alpha z + \beta, \quad y = \gamma z + \delta$$

---

(\*) M. de Saint-Guilhem (*Journal de Mathématiques*, t. I, p. 318) et M. Lebesgue (*Nouvelles Annales*, t. VII, p. 406) l'ont aussi donnée.



les équations d'une génératrice rectiligne. Alors on a

$$m\beta^2 + 2\alpha\beta k'' + l''\alpha^2 - 2\beta k + 2\alpha n' + l = 0,$$

$$m\delta^2 + 2\gamma\delta k'' + l''\gamma^2 - 2\delta k' + 2\gamma n + l' = 0,$$

relations qui renferment tous les résultats connus. Je remarque seulement que le cas particulier du cône entraîne l'égalité  $L = 0$ .

Ensuite les coefficients  $\alpha$  et  $\gamma$  dépendent l'un de l'autre d'après cette troisième relation

$$A\alpha^2 + A'\gamma^2 + 2B\gamma + 2B'\alpha + 2B''\alpha\gamma + A'' = 0,$$

d'où

$$\gamma = \frac{-(B + B''\alpha) \pm \sqrt{B^2 - A'A'' + (BB'' - A'B')\alpha + \alpha^2(B''^2 - AA')}}{A'}.$$

Or pour  $m = 0$ , la quantité sous le radical est un carré parfait, donc alors

$$\gamma = i\alpha + p,$$

$$i = \frac{\pm \sqrt{B''^2 - AA'} - B''}{A'} = \frac{\frac{+k''}{\sqrt{-L}} - B''}{A'},$$

$$p = \frac{\pm \frac{A'B' - BB''}{2\sqrt{B''^2 - AA'}} - B}{A'} = \frac{\pm \frac{k\sqrt{-L}}{k''} - B}{A'}.$$

Par conséquent, il y a deux séries de génératrices rectilignes parallèles aux deux plans

$$y = ix + pz$$

respectivement.

2. Soit

$$dy + ex + fz = dy' + ex' + fz'$$

l'équation d'un plan tangent à la surface et passant par le point  $x', y', z'$ . En substituant à  $g$  la valeur

$$-(dy' + ex' + fz')$$

dans la relation de contact, celle-ci devient (p. 217)

$$\begin{aligned} & \frac{d^2}{f^2} (my'^2 - 2k'y' + l') - \frac{2de}{f^2} (ky' + k'x' + n'' - mx'y') \\ & + \frac{e^2}{f^2} (mx'^2 - 2kx' + l) - \frac{2d}{f} (k'x' + k''y' + n - my'z') \\ & - \frac{2e}{f} (kz' + k''x' + n' - mz'x') + mz'^2 - 2k''z' + l'' = 0. \end{aligned}$$

Il faut en calculer les déterminants  $m_1$  et  $L_1$ .

1<sup>o</sup>.

$$\begin{aligned} m_1 &= y'^2 (k^2 - ml) - 2x'y' (kk' + mn'') + x'^2 (k'^2 + ml') \\ & + 2y' (kn'' + k'l) + 2x' (k'n'' + kl') + n''^2 - ll' \\ & = -L \left[ \begin{array}{l} y'^2 (B^2 - A'A'') + x'^2 (B'^2 - AA'') \\ + 2x'y' (BB' - A''B'') + 2y' (BC'' - A''C') \\ + 2x' (B'C'' - A''C) + C''^2 - A''E \end{array} \right] \\ & = -L [(A''z' + By' + B'x' + C'')^2 - A''F']. \end{aligned}$$

2<sup>o</sup>.

$$L_1 = 4 \left\{ \begin{array}{l} (my'^2 - 2k'y' + l') \\ \times (kz' + k''x' + n' - mz'x')^2 \\ + 2(ky' + k'x' + n'' - mx'y') \\ \times (k'z' + k''y' + n - my'z') \\ \times (kz' + k''x' + n' - mz'x') \\ + (mx'^2 - 2kx' + l) \\ \times (k'z' + k''y' + n - my'z')^2 \\ + \left[ \begin{array}{l} y'^2 (k^2 - ml) \\ - 2x'y' (kk' + mn'') \\ + x'^2 (k'^2 - ml') + 2y' (kn'' + k'l) \\ + 2x' (k'n'' + kl') + n''^2 - ll' \end{array} \right] \\ \times (mz'^2 - 2k'z' + l'') \end{array} \right\} = 4L^2 F' (*).$$

(\*) Lorsque  $m_1$  et  $F'$  sont négatifs, le point  $x', y', z'$  est intérieur. Lorsque  $m_1$  et  $F'$  sont de signes différents ou tous deux positifs, le point est extérieur.

Pour  $L = 0$ , cas du cône, l'équation entre  $\frac{d}{\bar{f}}$  et  $\frac{e}{\bar{f}}$  se décompose en deux facteurs du premier degré, ce qui doit être.

3. *Équation du cône circonscrit.* Il faut chercher la surface enveloppe du plan

$$d(y - y') + e(x - x') + f(z - z') = 0,$$

$\frac{d}{\bar{f}}, \frac{e}{\bar{f}}$  satisfaisant à l'équation du second degré trouvée ci-dessus (p. 223). Voici le résultat, en appelant  $m_1, l_1, k_1, \dots, n_1$  les fonctions d'identité relatives à cette équation

$$\begin{aligned} & m_1(z - z')^2 + 2(y - y')(z - z')k'_1 \\ & + 2(z - z')(x - x')l_1 + l_1(y - y')^2 \\ & + l_1(x - x')^2 - 2n_1(y - y')(x - x') = 0 \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} & l_1x^2 + l_1y^2 + m_1z^2 + 2k'_1yz + 2k_1zx - 2n_1yx \\ & - 2x(k_1z' + l_1x' - n_1y') - 2y(k'_1z' + l_1y' - n_1x') \\ & - 2z(m_1z' + k'_1y' + k_1x') + m_1z'^2 + 2k'_1y'z' \\ & + 2k_1z'x' - l_1y'^2 + l_1x'^2 - 2n_1x'y' = 0. \end{aligned}$$

*Cône asymptotique. Ici*

$$x' = \frac{k}{m}, \quad y' = \frac{k'}{m}, \quad z' = \frac{k''}{m}.$$

L'équation du cône asymptote, par des réductions faciles au moyen des relations d'identité, est finalement

$$\begin{aligned} & Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'xz + 2B''xy \\ & + 2Cx + 2C'y + 2C''z + E = \frac{L}{m}. \end{aligned}$$

4. **PROBLÈME.** *Trouver le lieu des sommets des trièdres trirectangles circonscrits à une surface du second degré.*

Soient

$$\begin{aligned} dy + ex + fz + g &= 0, \\ d'y + e'x + f'z + g' &= 0, \\ d''y + e''x + f''z + g'' &= 0, \end{aligned}$$

les équations de trois plans tangents à une surface du second degré et se coupant à angle droit. Les axes étant rectangulaires, on a

$$\begin{aligned} dd' + ee' + ff' &= 0, \\ dd'' + ee'' + ff'' &= 0, \\ d'd'' + e'e'' + f'f'' &= 0, \end{aligned}$$

et de plus (p. 223)

$$\begin{aligned} &d^2(my'^2 - 2k'y' + l') \\ &- 2de(ky' + k'x' + n' - mx'y') \\ &+ e^2(mx'^2 - 2k'x' + l) \\ &- 2df(k'z' + h''y' + n - my'z') \\ &- 2ef(kz' + h''x' + n' - mz'x') \\ &+ (mz'^2 - k''z' + l'')fz = 0, \end{aligned}$$

ainsi que deux autres équations analogues en  $d', e', f', d'',$  etc., où  $x', y', z'$  sont les coordonnées du point de concours des trois plans. Donc, d'après une identité précédemment démontrée (p. 213),

$$\begin{aligned} m(x'^2 + y'^2 + z'^2) - 2k'y' - 2kx' - 2k''z' \\ + l + l' + l'' = 0. \end{aligned}$$

C'est l'équation d'une sphère ayant même centre que la surface et pour carré de son rayon la somme algébrique des carrés des demi-axes.

Poisson, qui a résolu ce problème dans la *Correspondance sur l'École Polytechnique* (\*), a laissé de côté le

(\*) Voir t. V, page 670.

cas des deux paraboloides pour lesquels le lieu est

$$2kx' + 2k'y' + 2k''z'' = l + l' + l'',$$

c'est-à-dire un plan perpendiculaire à l'axe.

Plus bas, j'aurai besoin de l'équation du lieu actuel en coordonnées obliques. Il m'a paru difficile de l'obtenir directement. En effet, la condition de perpendicularité devenant alors

$$\begin{aligned} & ee' \sin^2 yz + dd' \sin^2 xz + ff' \sin^2 xy \\ & - (\cos xy - \cos zy \cos zx) (d'e + de') \\ & - (\cos yz - \cos zx \cos xy) (d'f + df') \\ & - (\cos zx - \cos xy \cos yz) (ef' + e'f) = 0, \end{aligned}$$

l'identité analogue à celle qui vient de nous servir serait bien plus compliquée. J'ai donc préféré déduire cette équation générale de l'hypothèse où les axes étaient rectangulaires; on obtient ainsi immédiatement

$$\begin{aligned} & mx'^2 + my'^2 + mz''^2 + 2mx'y' \cos xy + 2my'z' \cos yz \\ & + 2mx'z' \cos xz - 2x'(k + k' \cos xy + k'' \cos zx) \\ & - 2y'(k' + k \cos xy + k'' \cos yz) \\ & - 2z'(k'' + k' \cos yz + k \cos xz) + l + l' + l'' \\ & - 2n \cos yz - 2n' \cos xz - 2n'' \cos xy = 0, \end{aligned}$$

et pour  $m = 0$ ,

$$\begin{aligned} & y'(k' + k \cos xy + k'' \cos yz) \\ & + x'(k + k' \cos xy + k'' \cos xz) \\ & + z'(k'' + k' \cos yz + k \cos xz) \\ & + n \cos yz + n' \cos xz + n'' \cos xy - \frac{l + l' + l''}{2} = 0. \end{aligned}$$

#### IV.

##### LIEUX GÉOMÉTRIQUES.

1. Trouver le lieu des centres des surfaces du second

ordre assujetties à toucher sept plans donnés de position.

Prenons trois des plans pour plans coordonnés : alors

$$l = l' = l'' = 0.$$

Soient

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1,$$

$$\frac{x}{a'} + \frac{y}{b'} + \frac{z}{c'} = 1,$$

$$\frac{x}{a''} + \frac{y}{b''} + \frac{z}{c''} = 1,$$

$$\frac{x}{a'''} + \frac{y}{b'''} = \frac{z}{c'''} = 1,$$

les équations des quatre autres plans.

Nous aurons successivement, par la condition de tangence (p. 217),

$$\frac{an}{m} + \frac{bn'}{m} + \frac{cn''}{m} = bcx + acy + abz - \frac{abc}{2},$$

$$\frac{a'n}{m} + \frac{b'n'}{m} + \frac{c'n''}{m} = b'c'x + a'c'y + a'b'z - \frac{a'b'c'}{2},$$

$$\frac{a''n}{m} + \frac{b''n'}{m} + \frac{c''n''}{m} = b''c''x + a''c''y + a''b''z - \frac{a''b''c''}{2},$$

$$\frac{a'''n}{m} + \frac{b'''n'}{m} + \frac{c'''n''}{m} = b'''c'''x + a'''c'''y + a'''b'''z - \frac{a'''b'''c'''}{2},$$

où  $x, y, z$  désignent les coordonnées du centre de la surface variable. Il y a donc entre les quantités  $\frac{n}{m}, \frac{n'}{m}, \frac{n''}{m}$

quatre équations du premier degré; par conséquent, les seconds membres de ces équations seront liés entre eux

par une relation linéaire, c'est-à-dire que le lieu géométrique cherché est un plan.

*Corollaire I.* Les centres de toutes les surfaces du second ordre tangentes à huit plans appartiendront à une droite, intersection des huit plans qu'on obtiendrait en combinant les proposés sept à sept.

*Corollaire II.* Le centre de la surface tangente à neuf plans sera donc sur neuf droites.

2. Trouver le lieu des centres des surfaces du second ordre tangentes à six plans et dont la somme algébrique des carrés des axes soient donnée.

Prenons encore trois des plans pour plans des coordonnées. Nous aurons d'abord, comme ci-dessus,

$$\begin{aligned} \frac{an}{m} + \frac{bn'}{m} + \frac{cn''}{m} &= bcx + acy + abz - \frac{abc}{2}, \\ \frac{a'n}{m} + \frac{b'n'}{m} + \frac{c'n''}{m} &= b'c'x + a'c'y + a'b'z - \frac{a'b'c'}{2}, \\ \frac{a''n}{m} + \frac{b''n'}{m} + \frac{c''n''}{m} &= b''c''x + a''c''y + a''b''z - \frac{a''b''c''}{2}. \end{aligned}$$

Puis, appelant  $\psi^2$  la somme des carrés des demi-axes qui est donnée, on obtient (p. 209)

$$-\frac{L}{m^2} \left[ \begin{array}{l} B^2 - A'A'' + B'^2 - AA'' + B''^2 - AA' \\ + 2 \cos xy (A''B'' - BB') \\ + 2 \cos zy (AB - B'B'') \\ + 2 \cos xz (A'B' - BB'') \end{array} \right] = \psi^2,$$

équation qui se transforme par les *identités* (p. 209) en

$$\begin{aligned} \frac{k^2}{m^2} + \frac{k'^2}{m^2} + \frac{k''^2}{m^2} + 2 \cos xy \left( \frac{kk'}{m^2} + \frac{n''}{m} \right) \\ + 2 \cos zy \left( \frac{k'k''}{m^2} + \frac{n}{m} \right) + 2 \cos xz \left( \frac{kk''}{m^2} + \frac{n'}{m} \right) = \psi^2 \end{aligned}$$

ou

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2 \cos xy \left( xy + \frac{n''}{m} \right) \\ + 2 \cos zy \left( zy + \frac{n'}{m} \right) + 2 \cos zx \left( zx + \frac{n}{m} \right) = \psi^2.$$

Or  $\frac{n}{m}$ ,  $\frac{n'}{m}$ ,  $\frac{n''}{m}$  s'expriment au moyen des trois équations précédentes linéairement en  $x$ ,  $y$ ,  $z$ . Donc le lieu géométrique est une sphère.

La position de son centre est indépendante du carré donné. En effet, soient

$$\frac{n}{m} = \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta, \\ \frac{n'}{m} = \alpha' x + \beta' y + \gamma' z + \delta', \\ \frac{n''}{m} = \alpha'' x + \beta'' y + \gamma'' z + \delta'',$$

$\alpha, \beta, \gamma, \dots, \gamma''$  étant des fonctions de  $a, b, c$ , etc.

Le centre de la sphère sera au point de rencontre des plans

$$x + y \cos xy + z \cos xz + \alpha \cos zy + \alpha' \cos xz + \alpha'' \cos xy = 0, \\ y + x \cos xy + z \cos yz + \beta \cos zy + \beta' \cos xz + \beta'' \cos xy = 0, \\ z + y \cos yz + x \cos xz + \gamma \cos zy + \gamma' \cos xz + \gamma'' \cos xy = 0.$$

*Remarque.* Si l'on se proposait de construire des surfaces du second ordre tangentes à sept plans et dont la somme algébrique des carrés des axes fût donnée, il y aurait sept sphères devant renfermer leurs centres. Mais, d'autre part, ces centres appartiennent à un plan; ainsi généralement tous les groupes de sept sphères qui découleront des différentes valeurs du carré  $\psi^2$  auront un même *plan radical*. Pour une surface tangente à huit plans et dont la somme des carrés des axes serait connue, le centre serait à l'intersection d'une droite et des huit petits



cercles correspondants aux groupes de sept sphères qu'on obtiendrait en combinant les huit plans proposés sept à sept.

Du reste, abstraction faite de toute surface auxiliaire, on aperçoit sans peine la belle et difficile étude géométrique qui résulterait de la combinaison du système de six, sept ou huit plans avec le système de sphères provenant du second lieu ci-dessus traité et qu'on ne connaissait pas encore, que je sache. Il faudrait, pour se livrer à cette étude, fixer nettement la position du centre de la sphère par rapport aux six plans : problème plus ardu que son analogue en géométrie plane. Car dans celui-ci, où l'on détermine le lieu des centres des coniques tangentes à trois droites et dont la somme algébrique des carrés des axes est connue, le centre du lieu (qui est un cercle) coïncide précisément avec le point de rencontre des hauteurs du triangle formé par les trois droites (\*). Au contraire, rien n'est trouvé sur la figure formée par six plans quelconques.

3. Trouver le lieu des centres des surfaces du second ordre tangentes à six plans et dont les produits deux à deux des carrés des axes ont une somme donnée.

Ici la quatrième relation entre  $\frac{n}{m}$ ,  $\frac{n'}{m}$ ,  $\frac{n''}{m}$  se conclura de l'équation (p. 220)

$$-\frac{L_2}{m^3} \begin{bmatrix} A \sin^2 yz + A' \sin^2 xz + A'' \sin^2 xy \\ - 2 B' (\cos xz - \cos xy \cos zy) \\ - 2 B'' (\cos xy - \cos zy \cos zx) \\ - 2 B (\cos yz - \cos xy \cos xz) \end{bmatrix} = \psi^4,$$

$\psi$  étant une ligne connue.

---

(\*) Je possède depuis longtemps un moyen géométrique d'obtenir ce lieu

Les identités fournissent

$$\frac{AL^2}{m^3} = \frac{2n}{m} \frac{k'}{m} \frac{k''}{m} + \frac{n^2}{m^2},$$

$$\frac{A'L^2}{m^3} = \frac{2n'}{m} \frac{k}{m} \frac{k''}{m} + \frac{n'^2}{m^2},$$

$$\frac{A''L^2}{m^3} = \frac{2n''}{m} \frac{k}{m} \frac{k'}{m} + \frac{n''^2}{m^2},$$

$$\frac{BL^2}{m^3} = \frac{n}{m} \frac{k^2}{m^2} - \frac{k'}{m} \frac{k}{m} \frac{n'}{m} - \frac{n''}{m} \frac{k}{m} \frac{k''}{m} - \frac{n' n''}{m m} \dots$$

.....

Tous ces coefficients contiendront donc  $x, y, z$  au troisième degré, et ce sera le degré de la surface, lieu des centres.

4. Trouver le lieu des centres des surfaces du second ordre tangentes à six plans et dont le produit des axes est donné.

Nous avons, dans ce cas, pour quatrième relation entre

$\frac{n}{m}, \frac{n'}{m}, \frac{n''}{m}$  et  $x, y, z$  (p. 220) :

$$\frac{L^3}{m^4} \left( \begin{array}{l} 1 - \cos^2 xy - \cos^2 xz - \cos^2 yz \\ + 2 \cos xy \cos xz \cos yz \end{array} \right) = \psi^e.$$

On a (voir les identités)

$$\begin{aligned} \frac{L^3}{m^4} = & \frac{2n}{m} \frac{n'}{m} \frac{n''}{m} + \frac{2k}{m} \frac{k'}{m} \frac{n}{m} \frac{n'}{m} + \frac{2k}{m} \frac{k''}{m} \frac{n}{m} \frac{n''}{m} + \frac{2k'}{m} \frac{k''}{m} \frac{n'}{m} \frac{n''}{m} \\ & - \frac{k^2}{m^2} \frac{n^2}{m^2} - \frac{k'^2}{m^2} \frac{n'^2}{m^2} - \frac{k''^2}{m^2} \frac{n''^2}{m^2}. \end{aligned}$$

On voit clairement que le lieu est une surface du quatrième degré.

*Observation.* Il résulte des trois lieux précédents qu'on

peut construire au plus vingt-quatre surfaces du second ordre tangentes à six plans et égales à une surface donnée. Et le théorème analogue à celui de M. Steiner en géométrie plane s'énoncera ainsi :

**THÉORÈME.** *Les vingt-quatre surfaces du second ordre tangentes à six plans et égales en volume ont leurs centres sur une même sphère.*

5. Tous les pôles d'un plan fixe par rapport aux surfaces du second ordre tangentes à sept plans appartiennent à un plan. C'est une conséquence des formules trouvées § II, n° 4. Et les pôles d'un même plan par rapport aux surfaces tangentes à huit plans seront sur une droite.

En particulier, le point de contact de la surface variable avec chaque plan décrira une droite. De sorte que les points de contact respectifs de la surface assujettie à toucher neuf plans donnés seront situés chacun sur huit droites.

6. **THÉORÈME.** *Tous les plans d'où l'on voit sous un trièdre trirectangle les paraboloides tangents à six plans donnés concourent en un même point.*

Un quelconque de ces plans a pour équation (p. 226)

$$\begin{aligned} & y(k' + k \cos xy + k'' \cos zy) \\ & + x(k + k' \cos xy + k'' \cos zx) \\ & + z(k'' + k' \cos zy + k \cos zx) \\ & + n \cos yz + n' \cos xz + n'' \cos xy = 0. \end{aligned}$$

Mais

$$\begin{aligned} n &= \alpha k + \beta k' + \gamma k'', \\ n' &= \alpha' k + \beta' k' + \gamma' k'', \\ n'' &= \alpha'' k + \beta'' k' + \gamma'' k'', \end{aligned}$$

$\alpha, \beta, \gamma, \dots, \gamma''$  étant des nombres donnés. Dès lors l'é-

quation précédente pourra s'écrire

$$\begin{aligned}
 & k \left( \begin{array}{c} y \cos xy + x + z \cos zx \\ + \alpha \cos zy + \alpha' \cos zx + \alpha'' \cos xy \end{array} \right) \\
 & + k' \left( \begin{array}{c} y + x \cos xy + z \cos yz \\ + \beta \cos zy + \beta' \cos zx + \beta'' \cos xy \end{array} \right) \\
 & + k'' \left( \begin{array}{c} z + y \cos yz + x \cos xz \\ + \gamma \cos zy + \gamma' \cos xz + \gamma'' \cos xy \end{array} \right) = 0;
 \end{aligned}$$

et il est évident que le plan variable passera constamment par le point dont les coordonnées résultent des trois équations

$$\begin{aligned}
 y \cos xy + x + z \cos zx + \alpha \cos zy + \alpha' \cos zx + \alpha'' \cos xy &= 0, \\
 y + x \cos xy + z \cos yz + \beta \cos zy + \beta' \cos zx + \beta'' \cos xy &= 0, \\
 z + y \cos yz + x \cos xz + \gamma \cos zy + \gamma' \cos xz + \gamma'' \cos xy &= 0.
 \end{aligned}$$

Or le centre de la sphère traitée n° 2 devait aussi y satisfaire. Donc le point de concours n'est autre que le centre de cette sphère.

*Corollaires.* Les plans d'où l'on verrait sous un trièdre trirectangle les paraboloides tangents à sept plans renfermeront les points de concours qu'on aurait en combinant les plans proposés six à six. Cela ne se pourra que si tous ces points sont situés sur une même droite qui sera perpendiculaire au plan, lieu des centres.

Ainsi nous retombons sur le théorème relatif au plan radical commun des sphères qui ont été définies plus haut (p. 229).

Enfin le plan d'où l'on verrait sous un trièdre trirectangle le paraboloides tangent à huit plans est perpendiculaire à la droite, lieu des centres, qui est un diamètre de ce paraboloides.