

FAURE

Note sur les questions 368 et 369 (Cayley)

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 16 (1857), p. 192-196

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1857_1_16__192_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1857, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

NOTE SUR LES QUESTIONS 568 ET 569 (CAYLEY)

PAR M. FAURE,
Capitaine d'artillerie.

Soient

$$A = 0, \quad B = 0, \quad C = 0$$

les équations respectives des trois côtés BC, AC, AB des trois côtés d'un triangle ABC. Prenons un point arbitraire C dans le plan du triangle, joignons ce point aux sommets, et désignons par α, β, γ les points où ces droites rencontrent les côtés opposés A, B, C. On peut prendre pour les équations de ces trois droites

($a\alpha$)	$B - C = 0,$
($B\beta$)	$A - C = 0,$
($C\gamma$)	$A - B = 0.$

Cela posé, on voit aisément qu'une conique qui pas-

(193)

sera par les points α , β , γ aura une équation de la forme (*)

$$aA^2 + bB^2 + cC^2 \\ - (a + b)AB - (a + c)AC - (b + c)BC = 0,$$

a , b , c désignant des coefficients numériques arbitraires.

Cette conique rencontrera le côté A en un autre point α_1 , et les côtés B et C en β_1 et γ_1 . On obtiendra l'équation de la droite $A\alpha_1$ en faisant $A = 0$ dans l'équation de la conique. On trouve ainsi

$$\begin{array}{ll} \text{Equat. de } (A\alpha_1) & Bb - Cc = 0, \\ (B\beta_1) & Aa - Cc = 0, \\ (C\gamma_1) & Aa - Bb = 0. \end{array}$$

Ces droites se coupent en un même point D_1 .

La droite DD_1 aura pour équation

$$Aa(b - c) + Bb(c - a) + Cc(a - b) = 0 (**).$$

On trouve encore, relativement à la conique :

Polaire du point D

$$A(b + c) + B(a + c) + C(a + b) = 0;$$

Polaire du point D_1

$$Aa^2(b + c) + Bb^2(a + c) + Cc^2(a + b) = 0.$$

(*) Car les coordonnées de α satisfont aux équations

$$B - C = 0, \quad A = 0,$$

et, par conséquent, à l'équation de la conique; de même pour β et γ .

TM.

(**) Si dans cette équation on fait

$$A = B = C,$$

elle est satisfaite, donc le point D est sur cette droite; elle est encore satisfaite en posant

$$Aa = Bb = Cc;$$

donc le point D_1 est sur la droite.

TM.

- Prenons sur le côté BC opposé à l'angle A deux points a, a_1 qui soient conjugués harmoniques par rapport aux points B et C et par rapport aux intersections α, α_1 de la conique avec le côté BC. Prenons sur le côté AB et AC deux couples de points analogues b, b_1 et c, c_1 (*).

On trouve facilement

$$\begin{aligned} \text{Équat. de (Aa)} \quad & B\sqrt{b} - C\sqrt{c} = 0, \\ (Bb) \quad & A\sqrt{a} - C\sqrt{c} = 0, \\ (Cc) \quad & A\sqrt{a} - B\sqrt{b} = 0, \\ (Aa_1) \quad & B\sqrt{b} + C\sqrt{c} = 0, \\ (Bb_1) \quad & A\sqrt{a} + C\sqrt{c} = 0, \\ (Cc_1) \quad & A\sqrt{a} + B\sqrt{b} = 0. \end{aligned}$$

Ces équations montrent : 1° que les trois droites Aa, Bb, Cc se coupent en un même point ; 2° que les trois points a_1, b_1, c_1 sont sur une même droite qui a pour équation

$$A\sqrt{a} + B\sqrt{b} + C\sqrt{c} = 0.$$

Soient maintenant

$$\begin{aligned} R &= \alpha A + \beta B + \gamma C = 0, \\ S &= \alpha' A + \beta' B + \gamma' C = 0, \end{aligned}$$

deux droites, la première rencontre le côté BC aux points r_1, s_1 , la seconde rencontre ce même côté au point s_1 ; nous allons déterminer ces deux droites de manière que les points $r_1, s_1, B, C, \alpha, \alpha_1$ soient en involution, les points a et a_1 devant être les points doubles de l'involution. Il suffit d'après la manière dont les points a et a_1 ont été trouvés, d'exprimer que les quatre points a, r_1, a_1, s_1 sont en position harmonique.

Soit O le point d'intersection des droites R, S.

(*) Ne pas confondre a, b et c , points, avec α, β , etc., coefficients arbitraires.

$$\text{Equat. de } Oa \quad R(\beta' \sqrt{c} + \gamma' \sqrt{b}) - S(\beta \sqrt{c} + \gamma \sqrt{b}) = 0,$$

$$Oa_1 \quad R(\beta' \sqrt{c} - \gamma' \sqrt{b}) + S(\gamma \sqrt{b} - \beta \sqrt{c}) = 0,$$

et pour que ces droites soient conjuguées harmoniques relativement à OR et OS, il faudra qu'on ait

$$\beta\beta'c - \gamma\gamma'b = 0.$$

Si les droites R, S doivent couper les deux autres côtés du triangle, de manière à satisfaire à des conditions analogues à celles qui ont lieu relativement au côté BC, on trouvera encore les deux relations

$$\beta\beta'a - \alpha\alpha'b = 0,$$

$$\alpha\alpha'c - \gamma\gamma'a = 0,$$

qui avec la première déterminent les quantités α' , β' , γ' au moyen de α , β , γ , de sorte que la droite S aura pour équation

$$\frac{Aa}{\alpha} + \frac{Bb}{\beta} + \frac{Cc}{\gamma} = 0;$$

les quantités α , β , γ sont arbitraires, car la droite R est quelconque, mais elle détermine S.

Si dans les résultats précédents on fait $a = b = c = 1$, la conique devient tangente aux trois côtés du triangle, et l'on a la solution des questions 368 et 369 de M. Cayley.

Les droites représentées par les équations

$$l_1 = 0, \quad l_2 = 0,$$

$$l_2 + ml_1 = 0, \quad l_2 + nl_1 = 0, \quad nl_2 + m^2l_1 = 0$$

sont en involution.

$$l_2 + ml_1 = 0$$

est l'équation de la droite double. (BRIOCHI.)

On pourrait encore, au moyen des équations précédentes, trouver facilement d'autres théorèmes; je n'en citerai qu'un :

Si l'on mène les droites $\alpha\gamma$, $\gamma\beta$, $\beta\alpha$ et que l'on cherche

Les équations de ces droites, on trouve

$$\begin{aligned} (\alpha\gamma) & \quad A - B + C = 0, \\ (\gamma\beta) & \quad -A + B + C = 0, \\ (\beta\alpha) & \quad A + B - C = 0; \end{aligned}$$

et l'on voit tout de suite que les intersections de $\alpha\gamma$ et B , $\beta\gamma$ et A , $\alpha\beta$ et C sont sur la droite

$$L = A + B + C = 0.$$

Joignons aussi $\alpha_1\gamma_1$, $\gamma_1\beta_1$, $\beta_1\alpha_1$; on aura pour les équations de ces droites

$$\begin{aligned} (\alpha_1\gamma_1) & \quad Aa - Bb + Cc = 0, \\ (\gamma_1\beta_1) & \quad -Aa + Bb + Cc = 0, \\ (\beta_1\alpha_1) & \quad Aa + Bb + Cc = 0, \end{aligned}$$

et les points d'intersection de $\alpha_1\gamma_1$ et B , $\beta_1\gamma_1$ et A , $\alpha_1\beta_1$ et C sont sur la droite

$$L_1 = Aa + Bb + Cc = 0.$$

Si l'on se reporte à l'équation de la polaire du point D , on voit que les droites L et L_1 se coupent sur cette polaire, etc.

On pourra encore remarquer que si $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$ représentaient des courbes d'ordre m , au lieu de droites, on obtiendrait des théorèmes analogues aux précédents (*).