E. DE JONQUIÈRES

Solutions géométriques de la question 369

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 16 (1857), p. 189-192

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1857_1_16__189_1>

SOLUTIONS GÉOMÉTRIQUES DE LA QUESTION 369

(voir p. 126);

PAR M. E. DE JONQUIÈRES,
Lieutenant de vaisseau.

Soient ABC un triangle donné, D un point fixe dans son plan, α, β, γ les trois points où les droites DA, DB, DC rencontrent les côtés du triangle opposés aux sommets par lesquels elles passent respectivement.

Si l'on décrit la conique Σ qui passe par les points α, β, γ et qui touche les côtés BC, AC, cette conique sera aussi tangente au côté AB.

En effet, soient α_1, β_1, γ_1 les trois points infiniment voisins de α, β, γ dans les directions BC, AC et AB respectivement; s'il est possible de prouver que les côtés opposés de l'hexagone $\alpha\alpha_1\,\beta\beta_1\,\gamma\gamma_1$ se rencontrent en trois points situés en ligne droite, la proposition énoncée sera un simple corollaire du théorème de Pascal (*Géom. sup.*, n° 658), et par conséquent sera démontrée.

Les côtés opposés de cet hexagone sont AB et $\alpha\beta$, AC et $\alpha\gamma$, BC et $\beta\gamma$. Or les deux triangles ABC, $\alpha\beta\gamma$ ayant (par construction) leurs sommets situés deux à deux sur trois droites concourantes en un même point D, sont *homologiques*, et, par suite, leurs côtés se rencontrent deux à deux en trois points situés en ligne droite (*Géom. sup.*, n° 365). Donc, etc.

Cela posé, il s'agit de mener deux droites R et S rencontrant AB aux points r_1, s_1, BC aux points r_2, s_2 et AC aux points r_3, s_3, de telle sorte que les trois systèmes de cinq points r_1, s_1, A, γ, B; r_2, s_2, B, α, C; r_3, s_3, C, β, A soient en involution, α, β, γ étant des *points doubles*.

Qu'on décrive une conique quelconque Σ' par les trois sommets du triangle ABC. Elle aura, avec la conique inscrite Σ, trois systèmes de cordes communes ou *axes de symptose* conjugués, dont deux pourront être imaginaires, mais dont un sera toujours réel (Poncelet, *Traité des propriétés projectives*) (*). Chacun de ces systèmes de deux droites satisfera à la question proposée. Car ce système peut être regardé comme représentant une conique circonscrite au même quadrilatère que Σ et Σ', et, par conséquent, toute transversale, par exemple l'un quelconque des côtés du triangle ABC, rencontre ces deux droites et les deux coniques en six points en involution

(*) Deux coniques ont en commun quatre points.

(*Géom. sup.*, n° 743 étendu aux coniques). Ici deux des six points se confondent en un seul α ou β ou γ, puisque la conique Σ est tangente aux côtés du triangle ABC. Donc ces points sont des *points doubles* des involutions auxquels ils appartiennent respectivement (*Géom. sup.*, n°s 192 et 205).

La conique Σ' n'étant assujettie par l'énoncé qu'à la seule condition de passer par les trois sommets du triangle ABC, est indéterminée; une infinité satisfont à la question, et, par conséquent, il existe une infinité de systèmes de deux droites R et S qui remplissent la condition exigée.

Pour que la question soit déterminée, il faut, par exemple, qu'on donne à priori l'une R des deux droites ou bien leur point de concours O.

Dans le premier cas, on fera passer la conique Σ' par les trois points A, B, C et par les deux points d'intersection (réels ou imaginaires) de la conique Σ avec la droite donnée R. L'axe de symptose de ces deux coniques qui est conjugué à R sera la deuxième droite cherchée S.

Dans le second cas, on sait que le point O étant un point de concours de deux cordes communes conjuguées des deux coniques Σ, Σ', jouit de la propriété d'avoir même polaire par rapport à ces deux coniques. Soit donc L sa polaire prise relativement à la conique inscrite Σ. La question devient celle-ci : Par trois points A, B, C faire passer une conique Σ' telle, qu'un point donné O ait pour polaire, relativement à elle, une droite aussi donnée L, question facile à résoudre, puisqu'il suffit, pour obtenir deux nouveaux points de cette conique, de déterminer sur chacun des rayons OA et OB par exemple, le conjugué harmonique du point A ou du point B par rapport au segment que la polaire L intercepte sur ce rayon à partir du point O.

Chacun des systèmes de cordes communes des deux coniques Σ, Σ' résout la question 369, qui, ainsi circonscrite, comporte généralement trois solutions distinctes, dont deux peuvent être imaginaires, mais dont la troisième est toujours réelle.

Ces diverses constructions peuvent se traduire en analyse d'une manière simple à l'aide des notations abrégées dont on fait usage depuis quelques années dans la géométrie analytique et dont on trouve de nombreuses et intéressantes applications dans l'excellent *Traité des sections coniques* du Rév. G. Salmon, professeur à l'université de Dublin. Mais je n'entrerai pas ici dans ces nouveaux développements, qui ne pourraient, ce me semble, rien ajouter au fond même de la solution qui précède.