

E. PROUHET

**Solution et généralisation de la question 232**

*Nouvelles annales de mathématiques 1<sup>re</sup> série*, tome 16 (1857), p. 166-171

[http://www.numdam.org/item?id=NAM\\_1857\\_1\\_16\\_\\_166\\_1](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1857_1_16__166_1)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1857, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

---

---

**SOLUTION ET GÉNÉRALISATION DE LA QUESTION 232**

(voir t. X, p. 182);

PAR M. E. PROUHET.

---

La question 232 a déjà été résolue d'une manière très-remarquable par M. Tardy (t. XI, p. 345). Pour me con-

former au désir exprimé par ce savant professeur ( t. XI, p. 354 ), je vais donner ma propre solution avec les simplifications qui résultent d'un point de vue un peu plus général auquel j'ai été amené par de nouvelles réflexions.

1. Soient  $A_1, A_2, \dots, A_n$ ,  $n$  points distribués comme on voudra dans un plan, et concevons ces points liés par des droites, savoir le point  $A_1$  au point  $A_2$ , celui-ci au point  $A_3$ , etc., et enfin le point  $A_n$  au point  $A_1$ . Nous obtiendrons un polygone rentrant, d'une forme d'ailleurs quelconque.

Je désignerai par  $P_1$  l'aire de ce polygone; par  $P_2$  l'aire du polygone obtenu en joignant les milieux des côtés consécutifs du premier, etc.

2. Prenons maintenant des axes rectangulaires, et désignons par  $x_1, y_1, x_2, y_2$ , etc., les coordonnées des points  $A_1, A_2$ , etc.

Posons en outre

$$[\alpha, \beta] = x_\alpha y_\beta - x_\beta y_\alpha,$$

$$\Sigma_\alpha = [1, \alpha + 1] + [2, \alpha + 2] + \dots + [n, \alpha].$$

Ces fonctions jouissent de propriétés qu'il suffit d'indiquer, parce qu'elles sont bien connues ou d'une démonstration facile. Ainsi l'on a

$$[\alpha, \beta] = -[\beta, \alpha],$$

$$[\alpha, \alpha] = 0,$$

$$\Sigma_{n-\alpha} = -\Sigma_\alpha,$$

$$\Sigma_\omega = 0 \quad \text{si } n = 2\omega,$$

$$\Sigma_\omega = -\Sigma_{\omega-1} \quad \text{si } n = 2\omega - 1.$$

Enfin les coordonnées  $\xi$  et  $\eta$  d'un sommet de  $P_k$  sont

donnés par les formules symboliques :

$$\xi = \frac{1}{2^{k-1}} (1+x)^{k-1} x^\alpha,$$

$$\eta = \frac{1}{2^{k-1}} (1+y)^{k-1} y^\alpha,$$

dans lesquelles, après le développement du second membre, il faut remplacer les exposants par des indices.

3. Ces préliminaires admis, il est facile de démontrer le théorème suivant :

*Il existe une relation, indépendante du mode de distribution des points  $A_1, A_2, \dots, A_n$ , entre  $P_1, P_2, P_3, \dots$  et  $P_\omega$ ,  $\omega$  désignant  $\frac{n}{2}$  ou  $\frac{n-1}{2}$  selon que  $n$  est pair ou impair.*

En effet, on a d'abord pour l'aire du premier polygone (voir t. XV, p. 373)

$$P_1 = \frac{1}{2} \Sigma_1 = A_1 \Sigma_1.$$

Pour obtenir  $P_2$ , il suffira de changer dans cette formule  $x_1, y_1, x_2, y_2$ , etc., en  $\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}$ , etc., en sorte que  $P_2$  sera une somme d'expressions telles que les suivantes

$$\frac{1}{2} \frac{x_1+x_2}{2} \cdot \frac{y_2+y_3}{2} - \frac{1}{2} \frac{y_1+y_2}{2} \cdot \frac{x_2+x_3}{2},$$

dont le développement ne fournira que des termes de la forme  $a[1, 2]$  ou  $b[1, 3]$ . On pourra donc écrire

$$P_2 = B_1 \Sigma_1 + B_2 \Sigma_2,$$

$B_1, B_2$  étant des coefficients numériques indépendants des coordonnées.

4. En continuant de cette manière, on aura les égalités suivantes :

( 1 )  $P_1 = A_1 \Sigma_1,$

( 2 )  $P_2 = B_1 \Sigma_1 + B_2 \Sigma_2,$

( 3 )  $P_3 = C_1 \Sigma_1 + C_2 \Sigma_2 + C_3 \Sigma_3,$

.....

(  $\omega$  )  $P_\omega = L_1 \Sigma_1 + L_2 \Sigma_2 + L_3 \Sigma_3 + \dots + L_\omega \Sigma_\omega,$

auxquelles il faudra joindre, suivant les cas,

(  $\omega + 1$  )  $\Sigma_\omega = 0$  ou  $\Sigma_\omega = -\Sigma_{\omega-1}$  (\*).

5. La loi des coefficients qui entrent dans ces équations est assez compliquée, mais il suffit, pour notre objet, de remarquer que ceux que nous désignons par  $A_1, B_2, C_3, \dots, L_\omega$  ne sont pas nuls. On trouve en effet

$A_1 = \frac{1}{2}, B_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}, C_3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4}, D_4 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{8}, \dots$

Il résulte de cette remarque qu'on pourra toujours éliminer entre ces  $\omega + 1$  équations les quantités  $\Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_\omega$  qui sont au nombre de  $\omega$ . Le résultat de cette élimination sera la relation entre  $P_1, P_2, \dots, P_\omega$  dont l'existence était à démontrer.

Cette relation sera d'ailleurs linéaire et de la forme

( R )  $P_1 + A_2 P_2 + A_3 P_3 + \dots + A_\omega P_\omega = 0.$

(\*)  $\frac{1}{2} \Sigma_1, \frac{1}{2} \Sigma_2,$  etc., expriment les surfaces des polygones obtenus en joignant de deux en deux, de trois en trois, les sommets de  $P_1$ . Par exemple l'égalité (2), dans laquelle  $B_1 = \frac{1}{4}, B_2 = \frac{1}{8}$ , peut s'écrire ainsi

$P_2 = \frac{P_1}{2} + \frac{Q}{4},$

Q désignant l'aire du polygone obtenu en joignant de deux en deux les sommets de  $P_1$ .

6. Pour trouver les coefficients  $A_2, A_3, \dots, A_\omega$ , soit  $k$  un entier au plus égal à  $n$ , et désignons par  $\frac{k'}{n'}$  la fraction irréductible équivalente à  $\frac{k}{n}$ . Prenons pour  $P_1$  un polygone régulier étoilé de  $n'$  côtés et dont l'angle au centre est égal à  $\frac{2k'\pi}{n'}$ . Ce polygone pourra être assimilé à un polygone de  $n$  côtés, en considérant son périmètre comme un fil non interrompu qui se serait enroulé  $h$  fois autour de ses sommets,  $h$  représentant le quotient  $\frac{n}{n'}$ .

$P_1$  étant régulier, il en sera de même de  $P_2, P_3$ , etc. Chacun de ces polygones est composé de  $n$  triangles ayant le centre du polygone pour sommet commun.

Or la comparaison des triangles élémentaires de  $P_1$  et de  $P_2$  donne aisément

$$P_2 = P_1 \cos^2 \frac{k'\pi}{n'} = P_1 \cos^2 \frac{k\pi}{n}$$

on trouvera de même

$$P_3 = P_2 \cos^2 \frac{k\pi}{n} = P_1 \cos^4 \frac{k\pi}{n},$$

$$P_4 = P_3 \cos^2 \frac{k\pi}{n} = P_1 \cos^6 \frac{k\pi}{n},$$

.....

$$P_\omega = P_{\omega-1} \cos^2 \frac{k\pi}{n} = P_1 \cos^{2(\omega-1)} \frac{k\pi}{n}.$$

La substitution de ces valeurs dans la relation (R), après qu'on aura supprimé le facteur commun  $P_1$  et remplacé  $\cos^2 \frac{k\pi}{n}$  par  $x$ , donnera

$$(E) \quad 1 + A_2 x + A_3 x^2 + \dots + A_\omega x^{\omega-1} = 0.$$

$k$  étant l'un quelconque des nombres  $1, 2, 3, \dots, \omega - 1$ ,

il en résulte que l'équation (E) admet pour racines

$$\cos^2 \frac{\pi}{n}, \quad \cos^2 \frac{2\pi}{n}, \quad \cos^2 \frac{3\pi}{n}, \dots, \quad \cos^2 \frac{(\omega-1)\pi}{n}.$$

Or on trouve une équation qui admet ces mêmes racines lorsque l'on égale à zéro le développement de  $\sin na$  en fonction de  $\cos a$ , après y avoir remplacé  $\cos a$  par  $x$ . Cette équation est la suivante :

$$(C) \quad 1 + \mathfrak{A}_2 x + \mathfrak{A}_3 x^2 + \dots + \mathfrak{A}_\omega x^{\omega-1} = 0,$$

$\mathfrak{A}_2, \mathfrak{A}_3, \dots, \mathfrak{A}_\omega$  étant des fonctions de  $n$  comprises dans l'un des types

$$\frac{(n^2 - 2^2)(n^2 - 4^2) \dots [n^2 - (2p - 2)^2]}{2 \cdot 3 \dots (2p - 1)}$$

ou

$$\frac{(n^2 - 1^2)(n^2 - 3^2) \dots [n^2 - (2p - 3)^2]}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (2p - 2)},$$

suivant que  $n$  est pair ou impair.

Les équations (E) et (C) ont donc les mêmes racines et doivent être identiques. Par conséquent, on aura

$$A_2 = \mathfrak{A}_2, \quad A_3 = \mathfrak{A}_3, \dots$$

7. Ainsi les deux égalités qui constituent la question 232 se trouvent démontrées et de plus généralisées, de telle sorte qu'elles expriment une propriété qui appartient à  $n$  points distribués comme on voudra dans un plan, propriété qui ne dépend que du nombre de ces points.

---