COMBESCURE

Théorème sur le triangle sphérique

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 16 (1857), p. 142-143

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1857_1_16__142_0>

THÉORÈME SUR LE TRIANGLE SPHÉRIQUE ;

PAR M. COMBESCURE,
Professeur à Montpellier.

Théorème. ABC triangle sphérique; O centre de la sphère, V_1 volume du parallélipipède qui a pour arêtes OA′, OB′, OC′; A′, B′, C′ sont les milieux des côtés du triangle. S étant l'aire du triangle, on a

$$V_1 = \sin\frac{1}{2}S.$$

(CORNELIUS KEOGH.)

Démonstration. En désignant par a', b', c' les côtés du triangle A′, B′, C′, on a

$$\cos c' = \frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b + \sin\frac{1}{a}a\sin\frac{1}{2}b\cos C,$$

ou, en substituant les expressions connues de $\cos\frac{1}{2}a$, $\sin\frac{1}{2}a$, etc., en fonction des angles,

$$\cos c' = \cos\frac{1}{2}S\sqrt{\frac{\sin\left(A-\frac{1}{2}S\right)\sin\left(B-\frac{1}{2}S\right)}{\sin A\sin B}},\ldots$$

Maintenant on a

$$\begin{aligned}V_1^2 &= \sin^2 b'\sin^2 c'\sin^2 A'\\ &= 1-\cos^2 a'-\cos^2 b'-\cos^2 c'+2\cos a'\cos b'\cos c',\end{aligned}$$

et en substituant les expressions précédentes de $\cos c'$, $\cos b'$, $\cos a'$, il vient, après quelques transformations faciles,

$$V_1^2 = 1-\cos^2\frac{1}{2}S$$

ou

$$V_1 = \sin \frac{1}{2} S.$$