

H. D'ARREST

Sur l'ellipse de Cassini

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 16
(1857), p. 105-107

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1857_1_16__105_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1857, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

SUR L'ELLIPSE DE CASSINI;

D'APRÈS M. H. D'ARREST

(*Astron. Nachr* 1854, t. XXXVIII, p. 199.)

1. Soient :

$2e$ = la distance des deux foyers ;

$2a$ = le grand axe ;

d = le produit constant des rayons vecteurs.

On a pour l'équation de la courbe en coordonnées rectangulaires et focales, origine au centre,

$$(1) \quad \begin{cases} (x^2 + y^2)^2 - 2e^2(x^2 - y^2) - d^4 + e^4 = 0, \\ \rho^4 - 2e^2\rho^2 \cos^2\varphi - d^4 + e^4 = 0. \end{cases}$$

Prenons a pour unité et désignons le demi petit axe par b , de sorte que $d^2 + e^2 = 1$, $b^2 = d^2 - e^2$,

$$(2) \quad e = \sqrt{\frac{1-b^2}{2}}, \quad d = \sqrt{\frac{1+b^2}{2}},$$

aussi très-peu de CAH, on aura $FB > AD$, ce qui est le contraire de ce qu'indique l'énoncé

l'équation polaire devient

$$\rho^4 - (1 - b^2) \rho^2 \cos 2\varphi - b^2 = 0.$$

Soit une sphère de rayon 1 et ayant même centre que la courbe de Cassini. Considérons cette courbe comme étant dans le plan de l'équateur et faisons la projection stéréographique de cette courbe; le pôle étant dans un hémisphère et la projection dans l'hémisphère opposé, α et δ étant des coordonnées sphériques, l'équation de la courbe sphérique sera

$$(3) \quad \left(\frac{1 - \sin \delta}{1 + \sin \delta} \right)^2 - \frac{1 - \sin \delta}{1 + \sin \delta} (1 - b^2) \cos^2 \alpha = b^2.$$

Si l'on transporte l'origine au centre de la projection et si l'on désigne les nouvelles coordonnées sphériques par α' et δ' , de sorte que

$$\begin{aligned} \cos \delta' \cos \alpha' &= \sin \delta, \\ \cot \delta' \sin \alpha' &= \tan \alpha, \end{aligned}$$

après quelques légères réductions, l'équation (3) se change en celle-ci :

$$(4) \quad \cos \delta' = D \cos \alpha' \quad \text{ou} \quad D = \frac{1 + b^2}{1 - b^2}.$$

Ainsi la courbe est l'intersection d'une sphère et d'un cylindre circulaire droit de diamètre D et passant par le centre de la sphère.

Comme

$$b^2 = \frac{D - 1}{D + 1}, \quad e = \sqrt{\frac{1}{D + 1}}, \quad d = \sqrt{\frac{D}{D + 1}};$$

donc : 1°. Si D est plus grand que 2, on obtient l'ellipse de Cassini;

2°. Si D est compris entre 1 et 2, alors la courbe est fermée avec inflexion;

3°. Si $D = 1$, on a la lemniscate de Bernoulli ;

4°. Si $D < 1$, on a les deux ovals avec un demi petit axe imaginaire.
