

E. PROUHET

Note sur quelques identités

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 15
(1856), p. 86-91

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1856_1_15__86_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1856, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

NOTE SUR QUELQUES IDENTITÉS;

PAR M. E. PROUHET.

Je me propose de démontrer quelques identités curieuses énoncées sans démonstration par M. Oscar Weber, professeur à Dresde (*Archives de Grunert*, t. XXXII, p. 853; 1854).

Afin d'éviter une trop grande complication, je prendrai un exemple particulier, mais on verra sans peine que le même raisonnement convient à tous les cas.

Soient a, b, c, d, e, f six quantités inégales et que nous supposons racines de l'équation

$$x^6 + P_1 x^5 + P_2 x^4 + P_3 x^3 + P_4 x^2 + P_5 x + P_6 = 0.$$

Considérons le tableau formé des diverses puissances de ces quantités

a^6	a^5	a^4	a^3	a^2	a	a^0
b^6	b^5	b^4	b^3	b^2	b	b^0
c^6	c^5	c^4	c^3	c^2	c	c^0
d^6	d^5	d^4	d^3	d^2	d	d^0
e^6	e^5	e^4	e^3	e^2	e	e^0
f^6	f^5	f^4	f^3	f^2	f	f^0

(*) Chez Mallet-Bachelier, quai des Augustins, 55. Prix: 3^{fr} 50^c.

Ce tableau renferme quarante-deux termes, de sorte que si l'on enlève une des colonnes verticales, il restera trente-six quantités avec lesquelles on pourra former un déterminant. Je nomme D le déterminant que l'on obtient après avoir supprimé la première colonne à gauche, D_1 celui qu'on obtient en supprimant la seconde, et ainsi de suite.

D'après un théorème de Vandermonde (*A. S.*, 1772, 2^e partie, p. 522), on a

$$D = (a - b)(a - c) \dots (a - f)(b - c) \dots (b - f) \dots (e - f).$$

D'après un second théorème du même géomètre (*Ibid*, p. 254), on a

$$D_1 = \sum a^e \times \begin{bmatrix} b^4 & b^3 & b^2 & b & b^0 \\ c^4 & c^3 & c^2 & c & c^0 \\ d^4 & d^3 & d^2 & d & d^0 \\ e^4 & e^3 & e^2 & e & e^0 \\ f^4 & f^3 & f^2 & f & f^0 \end{bmatrix}.$$

Les déterminants compris sous le signe \sum ont tantôt le signe +, tantôt le signe —. Cette particularité n'ayant aucune importance pour l'objet que j'ai en vue, je me contenterai de remarquer que le terme exprimé a le signe +.

D'après le premier théorème de Vandermonde, on peut encore écrire

$$D_1 = \sum a^e (b - c)(b - d) \dots (b - f) \dots (e - f),$$

on aura ensuite

$$D_2 = \sum \begin{bmatrix} a^6 & a^5 \\ b^6 & b^5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} c^3 & c^2 & c & c^0 \\ d^3 & d^2 & d & d^0 \\ e^3 & e^2 & e & e^0 \\ f^3 & f^2 & f & f^0 \end{bmatrix},$$

Le numérateur de P_2 sera le déterminant D_2 dans lequel on aurait transporté la première colonne à la seconde place en changeant les signes de tous ses termes, ce qui n'altère pas la valeur de ce déterminant.

On aura donc

$$P_2 = \frac{D_2}{D},$$

ou, en réduisant,

$$(2) \quad \left\{ = \sum \frac{ab + ac + \dots + cf}{(a-c)(a-d)\dots(a-f)(b-c)\dots(b-f)} \right.$$

On aura de même

$$(3) \quad \left\{ = \sum \frac{abc + abd + \dots + def}{(a-d)(a-e)(a-f)(b-d)\dots(c-f)}, \right.$$

$$(4) \quad \left\{ = \sum \frac{abcd + abce + \dots + cdef}{(a-c)(a-f)(b-e)(b-f)\dots(d-f)}, \right.$$

$$(5) \quad \left\{ = \sum \frac{abcde + \dots + bcdef}{(a-f)(b-f)(c-f)(d-f)(e-f)} \right.$$

Les formules (1), (2), ..., (5) sont celles de M. Weber. On peut les renfermer dans le théorème suivant :

Si

$$a, b, c, \dots, f, g, \dots, l$$

sont m quantités inégales et racines de l'équation

$$f(x) = 0,$$

la somme des produits de ces racines prises n à n sera

égale à

$$(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \sum \frac{(abc \dots fg)^{m-n+1} (a-l)^2 (a-c)^2 \dots (f-g)^2}{f'(a) f'(b) \dots f'(g)}.$$

Un peu d'attention suffira pour voir que cet énoncé comprend toutes les formules particulières que nous venons de démontrer.

Note du Rédacteur. Ces identités sont d'utiles exercices de calcul à donner aux élèves ; développons-en quelques-unes :

$$a + b = \frac{a^2}{a-b} + \frac{b^2}{b-a},$$

$$a + b + c = \frac{a^3}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^3}{(b-a)(b-c)} \\ + \frac{c^3}{(c-a)(c-b)},$$

$$a + b + c + d = \frac{a^4}{(a-b)(a-c)(a-d)} \\ + \frac{b^4}{(b-a)(b-c)(b-d)} \\ + \frac{c^4}{(c-a)(c-b)(c-d)} \\ + \frac{d^4}{(d-a)(d-b)(d-c)},$$

etc. ;

$$ab + ac + bc = \frac{a^2 b^2}{(a-c)(b-c)} \\ + \frac{a^2 c^2}{(a-b)(c-b)} \\ + \frac{b^2 c^2}{(b-a)(c-a)},$$

(91)

$$\begin{aligned} ab + ac + ad + bc + bd + cd &= \frac{a^3 b^3}{(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)} \\ &+ \frac{a^3 c^3}{(a-b)(a-d)(c-b)(c-d)} \\ &+ \frac{a^3 d^3}{(a-b)(a-c)(d-b)(d-c)} \\ &\text{etc.;} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} abc + abd + acd + bcd &= \frac{a^2 b^2 c^2}{(a-d)(b-d)(c-d)} \\ &+ \frac{a^2 b^2 d^2}{(a-c)(b-c)(d-c)} \\ &+ \frac{a^2 c^2 d^2}{(a-c)(c-b)(c-d)} \\ &+ \frac{b^2 c^2 d^2}{(b-a)(c-a)(d-a)} \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$