NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

J.-CH. DUPAIN

Sur le calcul de π

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 15 (1856), p. 82-86

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1856_1_15__82_0>

SUR LE CALCUL DE π;

PAR M. J.-CH. DUPAIN,
Professeur.

Permettez-moi quelques observations au sujet d'une Note insérée dans les *Nouvelles Annales*, tome XIV, p. 462.

1°. Legendre traitant le même sujet (*Géométrie*, livre IV, prop. XIII) emploie des formules qui diffèrent de celles de M. Schlomilch,

$$A' = \sqrt{A.B},$$

$$B' = \frac{2\,A.B}{A + A'}.$$

A et B sont les surfaces de deux polygones réguliers l'un inscrit, l'autre circonscrit, A′ et B′ sont les surfaces des polygones d'un nombre double de côtés.

En adoptant cette notation, M. Schlomilch écrirait

$$A' = \sqrt{A.B}, \quad B' = \frac{2\,A'.B}{A' + B}.$$

Ces formules peuvent se déduire de celles de Legendre. En effet

$$A = \frac{A'^2}{B},$$

$$B' = \frac{2\,A'^2\,B}{AB + A'\,B},$$

$$B' = \frac{2\,A'^2\,B}{A'^2 + A'\,B};$$

je supprime le facteur commun A′ et j'ai

$$B' = \frac{2A'B}{A' + B}.$$

2°. Appelons P_n, p_n les périmètres de deux polygones réguliers de n côtés, l'un circonscrit, l'autre inscrit à un cercle. On a les formules

$$P_{2n} = \frac{2P_n p_n}{P_n + p_n}, \quad p_{2n} = \sqrt{p_n P_{2n}},$$

que l'on peut écrire

$$\frac{1}{P_{2n}} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{P_n} + \frac{1}{p_n}\right), \quad \frac{1}{p^2_n} = \sqrt{\frac{1}{p_n}\,\frac{1}{P_{2n}}}.$$

On est conduit aux mêmes calculs que M. Schlomilch, et ces calculs ne paraissent pas différer essentiellement de ceux de Schwab.

3°. Si l'on forme une série de termes commençant par a, b et telle, que chaque terme soit moyen arithmétique entre les deux précédents, le terme général de la série est

$$\frac{a + 2b}{3} - (-1)^n \frac{a - b}{3.2^n},$$

ce que l'on démontre aisément en admettant que deux termes consécutifs aient cette forme et en calculant le terme suivant.

Ce terme général a évidemment pour limite $\frac{a + 2b}{3}$.

4°. La méthode de Schwab est généralement adoptée pour le calcul élémentaire mais *sérieux* du nombre π.

Quand il s'agit d'indiquer rapidement à des élèves la possibilité de ce calcul, ne pourrait-on employer la marche suivante ?

(On est prié de tracer la figure.)

Dans un cercle dont le diamètre est 2 et dont la surface sera π, je trace deux rayons perpendiculaires OA, OC. Je divise en cinq parties égales la moitié OE de OA et aux points de division j'élève des ordonnées ou demi-cordes perpendiculaires sur OA, savoir ED, ff', gg', hh', ll'. Ces ordonnées sont moyennes proportionnelles entre les segments qu'elles interceptent sur le diamètre :

$$ff' = \sqrt{0,6 \times 1,4} = \sqrt{0,84} = 0,92,$$

$$gg' = \sqrt{0,7 \times 1,3} = \sqrt{0,91} = 0,95,$$

$$hh' = \sqrt{0,8 \times 1,2} = \sqrt{0,96} = 0,98,$$

$$ll' = \sqrt{0,9 \times 0,1} = \sqrt{0,99} - 1,00.$$

ED est la moitié du côté du triangle équilatéral inscrit

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = 0,86.$$

L'aire COED a pour valeur approchée

$$0,1 \left(\frac{1}{2}\text{DE} + ff' + gh' + hh' + ll' + \frac{1}{2}\text{OC}\right) = 0,478.$$

Le triangle ODE a pour mesure

$$\frac{1}{2}\text{OE} \times \text{DE} = \frac{\sqrt{3}}{8} = 0,216.$$

Le secteur COD étant la différence entre COED et COE, on a

$$\text{aire COD} = 0,478 - 0,216 = 0,262$$

Ce secteur est d'ailleurs la douzième partie du cercle; donc

$$\pi = 12 \times 0,262 = 3,144.$$

Cette valeur est approchée à moins d'un centième, mais on ne pourrait l'affirmer à priori.

Si l'on voulait être sûr que l'erreur commise est plus petite que ε, il faudrait que le nombre de divisions de OE fût plus grand que

$$\frac{2-\sqrt{3}}{8\varepsilon},$$

et l'on serait conduit à des calculs plus longs que ceux de Schwab.

5°. Un auteur connu par de nombreuses publications vient d'insérer dans sa *Géométrie* une Note d'un professeur du lycée Bonaparte.

Ce professeur calcule le nombre π au moyen des périmètres des polygones inscrits seulement et avec les Tables de Lalande (*Sic visum Superis*). On trouve ainsi :

Pour 64 côtés....	3,1394
Pour 128 côtés...	3,119

L'approximation diminue quand le nombre des côtés augmente. M. le Professeur se garde bien d'avouer ce fait, dans la crainte fondée d'effaroucher les élèves; mais a-t-il raison de le déguiser en disant que le périmètre du polygone de 128 côtés est aussi 3,1394? N'a-t-il pas à redouter la censure de ce juge sévère qui accuse les anciens auteurs (tels que M. Blanchet) de ne pas appliquer *franchement* la méthode des limites, par ce seul fait qu'ils emploient les polygones circonscrits.

Note du Rédacteur. M. Saigey vient de publier une méthode de calculer π, qui, conséquence de la méthode de Thomas Simpson, donne la même approximation. Nous reviendrons sur cette méthode, d'une élégance et d'une simplicité remarquables. On la trouve dans un ouvrage intitulé : *Géométrie élémentaire,* par M. Saigey; 1856, in-12 de 252 pages (*). Géométrie curieuse. On y trouve des proportions sans rapport et le célèbre axiome XI d'Euclide, qui a résisté pendant des milliers d'années aux efforts de tous les géomètres, y est démontré avec une rapidité électrique, à l'aide d'un mouvement d'éventail. C'est très-gracieux.