NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

MICHAEL ROBERTS

Sur une question d'algèbre relative à deux équations cubiques

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 15 (1856), p. 76-80

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1856_1_15__76_1>

SUR UNE QUESTION D'ALGÈBRE RELATIVE A DEUX ÉQUATIONS CUBIQUES;

PAR M. MICHAEL ROBERTS.

Etant données deux équations du troisième degré, savoir

(I) $\qquad x^3 - px^2 + qx - r = 0 \qquad$ (racines α, α', α''),

(II) $\qquad x^3 - p'x^2 + q'x - r' = 0 \qquad$ (racines β, β', β''),

je vais discuter l'équation dont les racines sont les valeurs que prend la fonction

$$\alpha\beta + \alpha'\beta' + \alpha''\beta''.$$

Désignons cette fonction par z et posons

$$M = p^2 q' + p'^2 q - 3 q q',$$
$$N = 2(p^3 r' + p'^3 r) - q(pqr' + p'q'r) + pp'qq' + 27 rr',$$
$$\Delta = 27 r^2 + 4q^3 - 18pqr + 4p^3 r - p^2 q^2,$$
$$\Delta' = 27 r'^3 + 4q'^3 - 18 p'q'r' + 4p'^3 r' - p'^2 q'^2$$

(Δ, Δ' sont les fonctions qu'on appelle aujourd'hui *discriminants* des équations données, et la condition $\Delta = 0$ exprime que l'équation (I) a deux racines égales) : l'équation dont il s'agit s'écrit sous la forme suivante :

$$\text{(III)} \qquad \left(z^3 - pp'z^2 + Mz - \frac{1}{2}N\right)^2 - \frac{1}{4}\Delta\Delta' = 0.$$

Si l'équation (I) a deux racines égales, l'équation (III) a ses racines égales deux à deux, ce qui se vérifie aisément à priori; et si les équations données deviennent identiques, Δ égale Δ', et l'équation (III) se décompose dans les suivantes :

$$z^3 - p^2 z^2 + Mz - \frac{1}{2}(N + \Delta) = 0,$$

$$z^3 - p^2 z^2 + Mz - \frac{1}{2}(N - \Delta) = 0.$$

Les racines de la première sont

$$\alpha^2 + 2\alpha'\alpha'', \quad \alpha'^2 + 2\alpha\alpha'', \quad \alpha''^2 + 2\alpha\alpha',$$

ce qu'on peut faire voir en éliminant x entre l'équation (I) et la suivante :

$$x^3 - xz + 2r = 0.$$

Les racines de la seconde sont évidemment q deux fois et $p^2 - 2q$.

Nous tirons aussi par différentiation

$$\frac{d\Delta}{dr}\cdot\frac{d\Delta'}{dr'} = 4\,(27\,\mathrm{N} - 18\,\mathrm{M}pp' + 4p^3p'^3),$$

et en représentant par Δ'' le discriminant de l'équation

$$\text{(IV)} \qquad z^3 - \mathrm{PP}'z^2 + \mathrm{M}z - \frac{1}{2}\mathrm{N} = 0,$$

nous avons

$$8\frac{d\Delta''}{d\mathrm{N}} = \frac{d\Delta}{dr}\cdot\frac{d\Delta'}{dr'},$$

ce qui exprime une relation entre les racines des dérivées des équations (I), (II), (IV).

En posant

$$z - \frac{pp'}{3} = u,$$

l'équation (III) se transforme en

$$\left\{\begin{array}{l} u^3 - \dfrac{u}{3}(p^2 - 3q)(p'^2 - 3q') \\ \quad - \dfrac{1}{216}\dfrac{d\Delta}{dr}\cdot\dfrac{d\Delta'}{dr'} \end{array}\right\}^2 - \frac{1}{4}\Delta\Delta' = 0;$$

d'où nous tirons

$$27\Delta'' = \left(\frac{1}{64}\frac{d\Delta}{dr}\cdot\frac{d\Delta'}{dr'}\right) - 4(p^2 - 3q)^3(p'^2 - 3q')^3,$$

mais on a

$$\left(\frac{d\Delta}{dr}\right)^2 - 108\Delta = 16(p^2 - 3q)^3 :$$

en sorte que

$$\Delta'' = \frac{1}{16}\left\{\Delta\left(\frac{d\Delta'}{dr'}\right)^2 + \Delta'\left(\frac{d\Delta}{dr}\right)^2 - 108\Delta\Delta'\right\}.$$

Posons maintenant

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & \alpha & \beta \\ 1 & \alpha' & \beta' \\ 1 & \alpha'' & \beta'' \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} 1 & \alpha & \beta \\ 1 & \alpha' & \beta'' \\ 1 & \alpha'' & \beta' \end{vmatrix}, \quad D_3 = \begin{vmatrix} 1 & \alpha & \beta' \\ 1 & \alpha' & \beta'' \\ 1 & \alpha'' & \beta \end{vmatrix},$$

$$D_4 = \begin{vmatrix} 1 & \alpha & \beta' \\ 1 & \alpha' & \beta \\ 1 & \alpha'' & \beta'' \end{vmatrix}, \quad D_5 = \begin{vmatrix} 1 & \alpha & \beta'' \\ 1 & \alpha' & \beta \\ 1 & \alpha'' & \beta' \end{vmatrix}, \quad D_6 = \begin{vmatrix} 1 & \alpha & \beta'' \\ 1 & \alpha' & \beta' \\ 1 & \alpha'' & \beta \end{vmatrix},$$

le produit P de ces six déterminants s'exprime d'une manière assez élégante. En effet, nous trouvons

$$16P = \Delta\left(\frac{d\Delta'}{dr'}\right)^2 - \Delta'\left(\frac{d\Delta}{dr}\right)^2,$$

ou bien encore

$$P = \Delta\,(p'^2 - 3q')^3 - \Delta'(p^2 - 3q)^3.$$

Si l'équation (III) n'a que deux racines égales, on a

$$\frac{\Delta}{\Delta'} = \left(\frac{p^2 - 3q}{p'^2 - 3q'}\right)^3.$$

Note du Rédacteur. Les six racines de l'équation (III) sont

$$\begin{aligned}
&\alpha\beta + \alpha'\beta' + \alpha''\beta'', \\
&\alpha\beta + \alpha'\beta'' + \alpha''\beta', \\
&\alpha\beta' + \alpha'\beta + \alpha''\beta'', \\
&\alpha\beta' + \alpha'\beta'' + \alpha''\beta, \\
&\alpha\beta'' + \alpha'\beta + \alpha''\beta', \\
&\alpha\beta'' + \alpha'\beta' + \alpha''\beta,
\end{aligned}$$

et l'équation (III) s'obtient par la théorie des fonctions symétriques. Cette équation peut toujours se ramener au troisième degré, car on a

$$z^3 - pp'z^2 + Mz - \frac{1}{2}N \pm \frac{1}{2}\sqrt{\Delta\Delta'} = 0.$$

Si

$$r = r' = 0,$$

on peut supposer

$$\alpha = \beta = 0;$$

l'équation (III) est alors relative à deux équations du second degré, et en supposant p, q, r des fonctions d'une variable y, on est amené à des propriétés géométriques des courbes du second et du troisième degré.