NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

P. SAINT-GUILHEM

# Nouvelle solution synthétique du problème de la rotation des corps

*Nouvelles annales de mathématiques 1re série*, tome 15 (1856), p. 63-76

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1856_1_15__63_0>

# NOUVELLE SOLUTION SYNTHÉTIQUE DU PROBLÈME DE LA ROTATION DES CORPS;

Par M. P. SAINT-GUILHEM,
Ingénieur en chef des Ponts et Chaussées.

1. Le problème dont il s'agit, et qui a pour objet la détermination du mouvement d'un corps de figure invariable autour d'un point fixe, est considéré par les géomètres comme un des plus importants et des plus difficiles de la mécanique rationnelle. Toutes les solutions de cette question, jusqu'à celle de M. Poinsot, avaient été déduites de l'analyse par des calculs plus ou moins compliqués, plus ou moins élégants.

Dans un Mémoire lu à l'Institut en 1834, l'illustre auteur de la *Théorie des couples* a exposé une solution synthétique, remarquable par les vues élevées et les considérations ingénieuses qu'elle renferme. Cette solution, présentée sous une forme très-simple et dépouillée de l'appareil des calculs, est entrée sans objection dans le domaine de la science où elle a tenu jusqu'à présent une haute place.

Aujourd'hui un de nos savants confrères à l'Académie de Toulouse, M. Gascheau, conteste, avec toute l'autorité que donnent de grandes lumières et un esprit rigoureux, la solidité d'un des principes fondamentaux sur lesquels elles reposent; il n'attribue qu'à une compensation d'erreurs l'exactitude des résultats auxquels elle conduit.

Nous partageons, après un examen réfléchi, l'opinion de notre savant confrère ; l'assertion qu'il a émise, à laquelle nous avons d'abord refusé de croire, est, pour nous, maintenant parfaitement justifiée : une application très-simple, placée à la fin de ce Mémoire, met en évidence l'erreur (*) du principe auquel nous faisons allusion.

Nous nous proposons, dans le travail suivant, de présenter une solution synthétique nouvelle du problème de la rotation des corps; elle nous paraît ne rien laisser à désirer, tant pour la simplicité que pour la rigueur.

*Définition.*

2. Lorsqu'un point matériel soumis à des forces et à des liaisons quelconques est en mouvement, une force unique qui produirait le même effet que les forces et les liaisons sur ce point devenu libre, sera la *force totale* qui sollicite ce point. La résultante des forces qui sollicitent un point matériel, sans égard à l'effet des liaisons, sera la *force motrice*.

Une force fictive qui serait appliquée à un point matériel dans le sens de la vitesse, et qui aurait pour mesure le produit de sa masse par sa vitesse, sera la *quantité de mouvement* du point matériel.

La *résultante de plusieurs droites* sera la résultante des forces qui seraient représentées par ces droites.

Nous appellerons, avec Poisson, *axe du moment* d'une force, une droite menée par le centre des moments perpendiculairement au plan du moment de la force.

---

(*) L'erreur est de supposer que la force centripète d'un point matériel qui fait partie d'un corps doué d'un mouvement de rotation est proportionnelle à la distance de ce point à l'axe instantané ; elle est réellement proportionnelle à la distance de ce point au centre de courbure du petit arc qu'il décrit dans un instant.

Sa *direction* sera telle, qu'un spectateur qui aurait les pieds sur le plan et le dos appuyé contre l'axe, verrait la force dirigée autour de lui de sa gauche à sa droite.

Sa *grandeur* sera le moment de la force.

*L'axe du moment résultant* de plusieurs forces sera l'axe du moment de la résistance de ces forces, le centre des moments étant considéré comme fixe.

L'extrémité de l'axe du moment résultant de plusieurs forces sera le *pôle* de ces forces.

Un *milieu relatif* sera un espace indéfini, mobile, dont chaque point reste invariablement lié à tous les autres.

Trois axes $ox$, $oy$, $oz$ seront dits *trois axes tournants* (*) lorsqu'ils seront disposés de manière qu'un spectateur qui aurait les pieds au point $o$ et le dos appuyé contre l'axe $oz$, verrait l'axe $ox$ à la gauche de l'axe $oy$. De cette manière, l'axe du moment d'une force située dans l'angle $xoy$, ou $yoz$, ou $zox$, et tendant à tourner autour du point $o$ de $ox$ vers $oy$, ou de $oy$ vers $oz$, ou de $oz$ vers $ox$, coïncidera avec l'axe $oz$, ou $ox$, ou $oy$.

Lorsqu'un corps tourne autour d'un point fixe, nous appellerons *caractéristique* du mouvement (**) l'axe du moment de la vitesse d'un point situé à la fois à l'unité de distance du point fixe et de l'axe instantané.

3. Cela posé, soient :

| | |
|---|---|
| $o$ | le point fixe autour duquel un corps solide est assujetti à tourner; |
| $ox$, $oy$, $oz$ | trois axes rectangulaires tournants fixes dans le corps ; |

(*) Je dis trois axes tonrnants, comme on dit trois lettres tournantes en parlant des trois lettres $x, y, z$ qui se succèdent circulairement.

(**) L'introduction de ce terme ou d'un terme analogue en mécanique nous paraît d'une très-grande utilité.

$x, y, z$ les cordonnées par rapport à ces axes d'un point du corps dont la masse est $m$.

Soient d'ailleurs au bout du temps $t$,

$\Omega$ la caractéristique du mouvement de rotation;

$p, q, r$ les projections de la droite $\Omega$ sur les axes $ox$, $oy$, $oz$;

G l'axe du moment résultant des quantités de mouvement des divers points du corps;

L, M, N les projections de la droite G sur les axes.

*Propositions préliminaires.*

4. Nous admettrons comme démontré que l'axe du moment résultant de plusieurs forces est la résultante des axes des moments de ces forces. A l'aide de ce théorème, nous démontrerons aisément les lemmes suivants :

Lemme I. *L'axe du moment résultant des forces totales est représenté à chaque instant en grandeur et en direction par la vitesse absolue du pôle des quantités de mouvement.*

En effet, la quantité de mouvement qui anime chaque point du corps au bout du temps $t+dt$, est la résultante de celle qui l'anime au bout du temps $t$ et de celle qui lui est communiquée dans l'instant $dt$.

Donc l'axe du moment résultant des quantités de mouvement qui animent les divers points du corps au bout du temps $t+dt$ est la résultante de l'axe du moment résultant des quantités de mouvement qui animent ces points au bout du temps $t$ et de l'axe du moment résultant des quantités de mouvement qui leur sont communiquées dans l'instant $dt$.

Donc, si G′, G, $g$ désignent ces trois axes, G′ sera la diagonale du parallélogramme construit sur les deux droites G et $g$; donc $g$ sera représenté en grandeur et en direction par la droite qui va de l'extrémité de G à l'extrémité de G'.

Or cette droite, agrandie dans le rapport de 1 à $dt$, représente la vitesse de l'extrémité de l'axe G.

Donc cette droite, agrandie dans le rapport de 1 à $dt$, représente en grandeur et en direction la vitesse du pôle des quantités de mouvement.

D'un autre côté, si la quantité de mouvement communiquée en chaque point dans l'instant $dt$ est agrandie dans le rapport de 1 à $dt$, elle représentera la force totale en ce point; donc $g$, agrandi dans le rapport de 1 à $dt$, représente aussi l'axe du moment résultant des forces totales ; donc, etc.

5. Lemme II. *Si l'on applique à un point quelconque du corps une droite égale, parallèle et contraire à la caractéristique, l'axe du moment de cette droite représentera en grandeur et en direction la vitesse du point dont il s'agit.*

En effet, soient $m$ le point dont il s'agit, $v$ une droite qui représente en grandeur et en direction sa vitesse, $\rho$ sa distance à l'axe instantané, $\Omega'$ une droite appliquée au point $m$, égale, parallèle et contraire à la caractéristique $\Omega$ (*); V l'axe du moment de cette droite, on aura évidemment

$$V = \rho . \Omega' = v.$$

D'ailleurs les droites V et $v$ étant l'une et l'autre perpendiculaires au plan qui passe par le point $m$ et par l'axe instantané, sont parallèles; elles sont dirigées dans le même sens, car la droite $\Omega'$ doit être dirigée de gauche à droite autour de l'axe V, comme $v$ l'est autour de la

(*) Le bras du moment $\Omega$ est l'unite. Ce moment est le même que la vitesse à l'unité de distance de l'axe. Tm.

caractéristique; or cela ne peut avoir lieu qu'autant que V et $v$ sont dirigés dans le même sens; donc, etc.

6. **Problème I.** *Déterminer les projections de l'axe du moment d'une force* P *sur les trois axes coordonnés.*

Soient $m$ le point d'application de la force P; $x, y, z$ ses coordonnées, X, Y, Z les composantes de la force P parallèles aux $x, y, z$.

On démontre aisément par la géométrie (en décomposant la force P en trois autres perpendiculaires aux axes) que la force P peut toujours être remplacée par ses projections sur trois plans rectangulaires et par une quatrième force égale, parallèle et contraire à la force P appliquée à l'origine.

De là il suit que l'axe du moment de la force P, estimé successivement suivant les axes des $x$, $y$, $z$, a pour expression

$$\mathrm{Z}y - z\mathrm{Y}, \quad \mathrm{X}z - x\mathrm{Z}, \quad \mathrm{Y}x - \mathrm{X}y,$$

car il coïncide successivement avec l'axe du moment résultant des projections des trois forces X, Y, Z sur chacun des plans coordonnés $yz$, $zx$, $xy$; et cet axe a pour expression les quantités ci-dessus, pourvu que l'on regarde les axes des moments qui coïncident avec les axes coordonnés comme positifs ou négatifs, suivant qu'ils sont portés du côté positif ou négatif de ces derniers axes.

7. **Problème II.** *Déterminer l'axe du moment résultant des quantités de mouvement.*

Appliquons à chaque point $m$ une droite $\Omega'$ égale, parallèle et contraire à la caractéristique, l'axe du moment de cette droite sera (lemme II) égal et parallèle à la vitesse du point $m$; or la projection de la droite $\Omega'$ sur les axes $ox$, $oy$, $oz$ étant $-p$, $-q$, $-r$, l'axe du moment de la droite $\Omega'$ aura pour projection les quantités $qz-ry$,

$rx - pz$, $py - qx$; par conséquent, l'axe du moment de la quantité de mouvement du point $m$ aura pour projections, la masse de ce point étant $m$,

$$m[(py - qx)y - (rx - pz)z],$$
$$m[(qz - ry)z - (py - qx)x],$$
$$m[(rx - pz)x - (qz - ry)y];$$

par suite, si nous posons, comme à l'ordinaire,

$$\Sigma m(y^2 + z^2) = A, \quad \Sigma m(z^2 + x^2) = B, \quad \Sigma m(x^2 + y^2) = C,$$
$$\Sigma myz = D, \qquad \Sigma mzx = E, \qquad \Sigma mxy = F.$$

Le signe de sommation $\Sigma$ s'étendant à tous les points du corps, l'axe du moment résultant des quantités de mouvement aura pour projections

$$(1) \qquad \begin{cases} L = Ap - Fq - Er, \\ M = Bq - Dr - Fp, \\ N = Cr - Ep - Dq. \end{cases}$$

Ces projections déterminent à chaque instant la grandeur et la direction de l'axe du moment résultant des quantités de mouvement.

8. Problème III. *Déterminer la vitesse du point du corps qui coïncide avec le pôle des quantités de mouvement.*

Soit $\pi$ le pôle des quantités de mouvement; appliquons à ce point une droite $\Omega'$ égale, parallèle et contraire à la droite $\Omega$, caractéristique du mouvement, l'axe du moment de la droite $\Omega'$ sera, lemme II, égal et parallèle à la vitesse du point $\pi$; or les projections de la droite $\Omega'$ sur les axes $ox$, $oy$, $oz$ étant respectivement $-p$, $-q$, $-r$, et les coordonnées du point $\pi$ sur les mêmes axes étant L, M, N, les projections de la vitesse du point $\pi$ seront respectivement, d'après les formules du problème I,

$$Nq - Mr,\quad Lr - Np,\quad Mp - Lq;$$

ces projections font connaître à chaque instant la vitesse dont il s'agit (*).

9. Problème IV. *Déterminer la vitesse du pôle des quantités de mouvement dans l'intérieur du corps, c'est-à-dire par rapport aux axes* ox, oy, oz.

L, M, N étant les coordonnées du pôle des quantités de mouvement par rapport aux axes $ox$, $oy$, $oz$, les projections de la vitesse de ce point sur ces axes sont respectivement

$$\frac{dL}{dt},\quad \frac{dM}{dt},\quad \frac{dN}{dt};$$

ces projections font connaître à chaque instant la vitesse dont il s'agit.

### *Équations du mouvement.*

10. Si l'on applique à chaque point du corps une force égale et contraire à la force totale qui le sollicite, il est évident que les forces auxquelles le corps sera soumis se feront équilibre, conformément au principe de d'Alem-

---

(*) Nous avions demontre dans un precedent Memoire, en partageant l'erreur de M. Poinsot, que la vitesse dont il s'agit représente en grandeur et en direction l'axe du moment résultant des forces centripètes. Ce théorème n'a plus lieu; mais on peut le remplacer evidemment par le suivant: *La vitesse du point du corps qui coïncide avec le pôle des quantités de mouvement représente en grandeur et en direction l'axe du moment résultant des forces centripètes, l'axe instantané étant tout à coup rendu fixe.* Ainsi modifié, ce theorème donne encore une interprétation de l'un des termes de chacune des équations d'Euler.

Si l'on regarde la force totale comme la resultante de la force centripète que nous venons de considérer et d'une autre force, il est visible que cette autre force ne sera pas généralement dans le plan qui passe par la force totale et par la force centripète réelle.

bert ; donc l'axe du moment résultant des forces motrices coïncide en grandeur et en direction avec l'axe du moment résultant des forces totales, ou, d'après le lemme I, avec la vitesse absolue du pôle des quantités de mouvement.

Or la vitesse absolue d'un point situé dans un milieu relatif est évidemment la résultante de la vitesse de ce point dans le milieu relatif, et de la vitesse du même point considéré comme un point du milieu relatif; donc l'axe du moment résultant des forces motrices coïncidera en grandeur et en direction avec la résultante de la vitesse du pôle des quantités de mouvement dans l'intérieur du corps et de la vitesse du même point considéré comme un point du corps.

Traduisons cette relation en nombres ·

Si l'on désigne par P, Q, R les projections de l'axe du moment résultant des forces motrices sur les axes $ox$, $oy$, $oz$, on aura, d'après les formules des préliminaires,

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} P &= \frac{dL}{dt} + Nq - Mr, \\ Q &= \frac{dM}{dt} + Lr - Np, \\ R &= \frac{dN}{dt} + Mp - Lq. \end{aligned}\right.$$

Ces équations coïncident avec les équations d'Euler lorsque l'on prend pour axes coordonnés les axes principaux du corps.

Elles déterminent, avec les équations (1), les vitesses angulaires du corps à une époque quelconque autour des trois axes $ox$, $oy$, $oz$; il reste à trouver la position des axes mobiles $ox$, $oy$, $oz$ par rapport à trois axes rectangulaires $ox'$, $oy'$, $oz'$ fixes dans l'espace. A cet effet, remarquons que le corps tournant autour de l'axe instantané avec une vitesse angulaire égale à $\Omega$ pendant l'instant $dt$ occupe à la fin de cet instant, par rapport à l'un quelconque des axes $ox'$, $oy'$, $oz'$ la même position que si le corps était resté fixe et que l'axe considéré eût tourné autour de l'axe instantané pendant l'instant $dt$ avec une vitesse angulaire égale et contraire à celle qu'avait le corps autour de l'axe instantané.

Donc, si l'on prend sur l'un des axes $ox'$, $oy'$, $oz'$ un point $m_1$ et qu'on applique en ce point une droite $\Omega_1$ égale et parallèle à la droite $\Omega$, l'axe du moment de cette droite sera égal et parallèle à la vitesse du point $m_1$; donc, si l'on appelle $x_1$, $y_1$, $z_1$ les coordonnées du point $m_1$ par rapport aux axes $ox$, $oy$, $oz$, on aura, en observant que la droite $\Omega_1$ a pour projection sur les axes $p$, $q$, $r$,

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= ry_1 - qz_1, \\ \frac{dy_1}{dt} &= pz_1 - rx_1, \\ \frac{dz_1}{dt} &= qx_1 - py_1. \end{aligned}\right.$$

Au moyen de ces relations, on aura la position de l'un quelconque des axes $ox_1$, $oy_1$, $oz_1$ par rapport aux axes $ox$, $oy$, $oz$, et, par conséquent, la position de chacun de ceux-ci par rapport aux axes fixes dans l'espace (*).

*Note.*

M. Poinsot suppose, dans sa *Théorie nouvelle de la Rotation,* que lorsqu'un corps tourne autour d'un point fixe, la force centripète est toujours proportionnelle à la distance de ce point à l'axe instantané, et, par conséquent, que cette distance est toujours égale au rayon de courbure de l'arc décrit par ce point en un instant. Le

(*) *Voir* STURM, *Nouvelles Annales*, t. X, p. 419. TM.

problème suivant met en évidence l'inexactitude de cette hypothèse.

**Problème.** *Un cercle dont le centre est fixe et dont le plan est vertical, tourne à la fois autour de son diamètre vertical et autour de son centre dans son plan. Les vitesses angulaires de ces deux rotations sont toujours égales entre elles; on demande de déterminer : 1° la trajectoire de l'un des points de la circonférence du cercle mobile; 2° la longueur de la perpendiculaire abaissée d'une position quelconque du point générateur sur l'axe instantané correspondant; 3° le rayon de courbure de la trajectoire correspondant au même point.*

Soient :

| | |
|---|---|
| $m$ | le point générateur de la trajectoire, point que nous supposerons, pour plus de simplicité, distant du point fixe d'une quantité égale à l'unité; |
| $om$ | le rayon vecteur mené du point fixe au point $m$; |
| $ox$, $oy$, $oz$ | trois axes rectangulaires tels, que l'axe $oz$ coïncide avec $om$ lorsque ce rayon est dirigé verticalement de bas en haut; que l'axe $ox$ coïncide avec la position qu'aurait eue le rayon $om$ après avoir décrit un angle de 90 degrés si le plan du cercle était resté immobile; que l'axe $oy$ coïncide avec la position qu'occupe réellement le rayon $om$ à la même époque; |
| $x$, $y$, $z$ | les coordonnées du point $m$ à une époque quelconque; |
| $\varphi$ | l'angle que le rayon vecteur $om$ fait avec l'axe $oz$, angle toujours égal à celui que la projection de $om$ sur le plan des $xy$ fait avec l'axe des $x$. |

Au moyen de ces notations, on trouve immédiatement les relations suivantes :

$$(1)\qquad \begin{cases} x = \sin\varphi\cos\varphi, \\ y = \sin^2\varphi, \\ z = \cos\varphi. \end{cases}$$

De là on déduit d'abord

$$(2)\qquad \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1, \\ x^2 + y^2 - y = 0. \end{cases}$$

Ces équations montrent que la trajectoire est l'intersection de la sphère décrite par la circonférence du cercle mobile avec un cylindre droit vertical tangent au plan de ce cercle dans sa position initiale et ayant pour base un cercle dont la diamètre est le rayon du cercle mobile.

Cherchons, en second lieu, la longueur de la perpendiculaire abaissée du point $m$ sur l'axe instantané correspondant.

Pour avoir la position de l'axe instantané à une époque quelconque, il suffit de construire la diagonale du parallélogramme dont les côtés contigus sont les caractéristiques des deux mouvements de rotation à cette époque. Ces caractéristiques sont, d'après l'énoncé, égales entre elles; l'une coïncide toujours avec l'axe $oz$, l'autre est toujours dans un plan perpendiculaire au cercle mobile; donc l'axe instantané fait un angle de 45 degrés avec l'axe des $z$ et reste toujours dans un plan vertical perpendiculaire au plan du cercle mobile.

D'après cela, si l'on désigne par $h$ la perpendiculaire dont il s'agit, on trouvera sans peine

$$h = \sin^2\varphi + \frac{1}{2}\cos^2\varphi,$$

d'où

$$(3) \qquad h = \sqrt{\frac{1 + \sin^2 \varphi}{2}}.$$

Cherchons enfin le rayon de courbure de la trajectoire au point $m$; si nous désignons ce rayon par $\rho$, et par $s$ l'arc de la trajectoire compris entre le point $m$ et l'axe des $z$, on aura

$$(4) \qquad \rho = \frac{ds^2}{\sqrt{(d^2 x)^2 + (d^2 y)^2 + (d^2 z)^2 - (d^2 s)^2}}.$$

Or on déduit des équations (1):

$$\frac{dx}{d\varphi} = \cos 2\varphi, \qquad \frac{dy}{d\varphi} = \sin 2\varphi,$$

$$\frac{dz}{d\varphi} = -\sin\varphi, \qquad \frac{ds^2}{d\varphi^2} = 1 + \sin^2\varphi,$$

$$\frac{d^2 x}{d\varphi^2} = -2\sin 2\varphi, \qquad \frac{d^2 y}{d\varphi^2} = 2\cos 2\varphi,$$

$$\frac{d^2 z}{d\varphi^2} = -\cos\varphi, \qquad \frac{ds\, d^2 s}{d\varphi^3} = \sin\varphi\cos\varphi.$$

Au moyen de ces valeurs, la formule (4) devient

$$(5) \qquad \rho = \sqrt{\frac{(1 + \sin^2\varphi)^3}{5 + 3\sin^2\varphi}}.$$

Pour que le rayon de courbure de la trajectoire au point $m$ soit égal, comme le suppose M. Poinsot, à la perpendiculaire abaissée de ce point sur l'axe instantané correspondant, il faut que l'on ait, quel que soit $\varphi$,

$$\frac{(1 + \sin^2\varphi)^2}{5 + 3\sin^2\varphi} = \frac{1}{2}.$$

Or cette équation n'est satisfaite que par les valeurs

$$\varphi = 90^\circ (1 \pm 2n);$$

$n$ étant un nombre entier quelconque, ces valeurs correspondent au point unique où la trajectoire vient couper le plan des $xy$.

Ainsi la solution du problème de la rotation des corps par M. Poinsot est inacceptable.

*Note du Rédacteur.* Il faut se rappeler que tout couple est représenté en *grandeur* et en *direction* par son axe, de sorte que l'axe représente une force; de là l'expression de l'auteur résultante des *axes*. Il n'emploie pas le mot *couple* et le remplace par le mot *moment*; il semble que cette substitution n'est pas favorable à la clarté, mais ne nuit pas à la justesse des raisonnements. L'erreur signalée provient de ce que les vitesses dépendent d'infiniment petits du premier ordre, tels sont les contacts des tangentes; tandis que les forces accélératrices, et, par conséquent, les forces centripètes dépendent d'infiniment petits du second ordre, tels sont les contacts des cercles de courbures.