NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

BRIOSCHI

Théorème sur une propriété des racines des équations algébriques

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 15 (1856), p. 366-368

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1856_1_15__366_0>

THÉORÈME SUR UNE PROPRIÉTÉ DES RACINES DES ÉQUATIONS ALGÉBRIQUES.

PAR M. BRIOSCHI,
Professeur à l'université de Pavie (*).

Lemme. Soient $x_1, x_2, \ldots, x_n$ les n racines supposées inégales de l'équation

$$f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n = 0.$$

En posant

$$\psi(x) = (x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_r),$$
$$\varphi(x) = (x - x_{r+1})(x - x_{r+2}) \ldots (x - x_n),$$

on a

$$\varphi(x) = \frac{f(x)}{\psi(x)}, \quad \varphi'(x) = \frac{f'(x)}{\psi(x)} - f(x)\frac{\psi'(x)}{\psi^2(x)};$$

de la dernière desquelles on déduit, vu que

$$f(x_{r+1}) = 0, \ldots,$$

$$\varphi'(x_{r+1})\varphi'(x_{r+2}) \ldots \varphi'(x_n) = \frac{f'(x_{r+1})f'(x_{r+2}) \ldots f'(x_n)}{\psi(x_{r+1})\psi(x_{r+2}) \ldots \psi(x_n)}.$$

Or on a évidemment

$$\psi'(x_1)\psi'(x_2) \ldots \psi'(x_r)\psi(x_{r+1})\psi(x_{r+2}) \ldots \psi(x_n)$$
$$= (-1)^{r(n-r)} f'(x_1)f'(x_2) \ldots f'(x_r);$$

par conséquent

$$\varphi'(x_{r+1})\varphi'(x_{r+2}) \ldots \varphi'(x_n)$$
$$= (-1)^{r(n-r)} \frac{f'(x_{r+1})f'(x_{r+2}) \ldots f'(x_n)}{f'(x_1)f'(x_2) \ldots f(x_r)} \psi'(x_1)\psi'(x_2) \ldots \psi'(x_r);$$

(*) Nous engageons le lecteur à prendre un exemple particulier, par exemple $r = 2$, $n = 5$.

et parce que, en indiquant par D, Δ, ∇ les produits respectifs des carrés des différences des racines des équations

$$f(x)=0, \quad \varphi(x)=0, \quad \psi(x)=0,$$

on a, comme on sait,

$$\pm D = f'(x_1)f'(x_2)\ldots f'(x_n),$$
$$\pm \Delta = \varphi'(x_{r+1})\varphi'(x_{r+2})\ldots \varphi'(x_n),$$
$$\pm \nabla = \psi'(x_1)\psi'(x_2)\ldots \psi'(x_r)$$

(les quantités D, Δ, ∇ étant prises avec le signe positif lorsque les nombres n, $n-r$, r seront $\equiv 0$ ou $\equiv 1$ (mod. 4), et avec le signe négatif dans les autres cas); on aura

$$(\pm \Delta) = (-1)^{r(n-r)} \frac{(\pm \nabla)}{f'^2(x_1)f'^2(x_2)\ldots f'^2(x_r)}(\pm D).$$

Supposons

$$r = n-2,$$

on aura

$$\pm \Delta = -(x_{n-1}-x_n)^2,$$

et les quantités D, ∇ devront être prises avec des signes contraires. Donc

$$(x_{n-1}-x_n)^2 = \frac{\nabla}{f'^2(x_1)f'^2(x_2)\ldots f'^2(x_{n-2})}\cdot D;$$

mais

$$x_{n-1}+x_n = -(a_1+x_1+x_2+\ldots+x_{n-2}),$$

par conséquent

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} x_{n-1} &= -\frac{1}{2}(a_1+x_1+\ldots+x_{n-2}) \\ &\qquad +\frac{1}{2}\frac{\sqrt{\nabla}}{f'(x_1)f'(x_2)\ldots f'(x_{n-2})}\sqrt{D} \\ x_n &= -\frac{1}{2}(a_1+x_1+\ldots+x_{n-2}) \\ &\qquad -\frac{1}{2}\frac{\sqrt{\nabla}}{f'(x_1)f'(x_2)\ldots f(x_{n-2})}\sqrt{D}. \end{aligned}\right.$$

Or D peut s'exprimer en fonction des coefficients de l'équation donnée, et $\frac{\sqrt{\nabla}}{f'(x_1)f'(x_2)\ldots f'(x_{n-2})}$ est une fonction rationnelle des racines $x_1, x_2, \ldots, x_{n-2}$, vu que ∇ est un carré ; on a donc le théorème suivant :

THÉORÈME. *Deux racines quelconques d'une équation algébrique du $n^{\text{ième}}$ degré peuvent être exprimées en fonction rationnelle des autres* n — 2.

Observation. Indiquant par

$$\theta(x_1, x_2, \ldots x_{n-2})$$

le second membre de la première des équations (1), on trouve facilement que cette fonction n'a que deux valeurs (Serret, *Algèbre supérieure,* p. 275). Ces deux valeurs sont celles des deux racines x_{n-1}, x_n.

Pour l'équation du troisième degré, en posant (*Alg. sup.*, p. 218)

$$x_2 = -\frac{1}{2}(a_1 + x_1) + \frac{1}{2}\frac{\sqrt{D}}{f'(x_1)} = \theta(x_1),$$

on trouve

$$x_3 = \theta(x_2), \quad x_1 = \theta(x_3),$$

c'est-à-dire x étant une racine quelconque : les trois racines seront

$$x, \ \theta(x), \ \theta^2(x).$$

Pour l'équation du quatrième degré, en posant

$$-\frac{1}{2}(a_1 + x_r + x_s) + \frac{1}{2}\frac{x_r - x_s}{f'(x_r)f'(x_s)}\sqrt{D} = \theta(x_r, x_s),$$

on a

$$x_r = \theta(x_r, x_s) = \theta(x_s, x_u) = \theta(x_u, x_r).$$

De ces propriétés des racines, on déduit que ces équations sont résolubles algébriquement.

Note. Incessamment une démonstration fort simple de ce théorème par M. A. Genocchi.