NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

POUDRA

Problème sur les courbes du troisième ordre

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 15 (1856), p. 24-26

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1856_1_15__24_1>

PROBLÈME SUR LES COURBES DU TROISIÈME ORDRE;

PAR M. POUDRA.

Deux courbes du troisième ordre passent par les quatre points communs a, b, c, d, en outre la première passe par les cinq points 1, 2, 3, 4, 5, et la deuxième par les points 1′, 2′, 3′, 4′, 5′, ce qui détermine complétement les deux courbes. On demande de trouver la section conique qui passe par les cinq autres points inconnus d'intersection des deux courbes.

Par les quatre points *a*, *b*, *c*, *d*, on trace les cinq coniques qui passent successivement par chacun des cinq points 1, 2, 3, 4, 5.

De même par les quatre points *a*, *b*, *c*, *d* et les cinq 1′, 2′, 3′, 4′, 5′, on fait passer cinq autres coniques.

En un des points communs, tel que *a*, on mène les tangentes à ces deux séries de cinq coniques. On a ainsi deux faisceaux de cinq tangentes.

On détermine dans le plan le point P, d'où les cinq points 1, 2, 3, 4, 5 sont vus sous un faisceau homographique à celui des cinq premières tangentes; et de même le point P′, d'où les cinq points 1′, 2′, 3′, 4′, 5′ sont vus sous un faisceau homographique à celui des secondes tangentes. On sait que le point P appartiendra à la première courbe du troisième ordre et le point P′ à la seconde.

Si l'on voulait déterminer une infinité de points de ces deux courbes, on ferait passer par les quatre points *a*, *b*, *c*, *d* une infinité de coniques. On déterminerait leur tangente à un point commun *a*. On aurait un faisceau de tangentes, auquel correspondrait au point P un faisceau de droites, homographique avec celui des tangentes; mais de même au point P′ on aurait un autre faisceau, homographique avec ce même faisceau de tangentes: donc ces deux faisceaux ayant pour sommet les points P et P′, seront homographiques entre eux; par conséquent, les rayons homologues se couperaient suivant une section conique C passant par P et P′. Or, d'après la description des courbes du troisième ordre donnée par M. Chasles, chaque rayon de chaque faisceau coupe la conique correspondante en deux points de la courbe du troisième ordre, donc on peut ainsi déterminer un nombre infini de points des deux courbes du troisième ordre; parmi les points, se trouvent les cinq points communs d'intersection de ces deux courbes correspondant à cinq coniques communes : donc ces cinq points se trouveront sur la conique C ci-dessus qui passe par les points P et P′ et qui contient tous les points d'intersection des deux faisceaux dont ces deux points sont les sommets.

Ce problème peut servir à résoudre le suivant :

Étant donnés les cinq points a, b, c, d, e *communs à deux courbes du troisième ordre, déterminer les quatre autres points d'intersection de ces deux courbes.*

On construira : 1° la conique ci-dessus relative aux quatre points a, b, c, d, puis celle qui est relative aux quatre points a, b, c et e. Ces deux coniques se couperont généralement en quatre points qui seront les points cherchés.