Nouvelles annales de mathématiques

L. Servier

Solution trigonométrique de la question 323

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 15 (1856), p. 228-229

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1856_1_15__228_0>

SOLUTION TRIGONOMÉTRIQUE DE LA QUESTION 323

(voir page 154) ;

PAR M. L'ABBÉ L. SERVIER,
Professeur à Saint-Étienne.

Deux cercles étant dans un même plan, et les tangentes communes intérieures se coupant à angle droit, l'aire du triangle formé par ces tangentes et une tangente commune extérieure est équivalente au rectangle des rayons.

Soient O et O′ les centres des deux cercles de rayon R et R′ ; A le point d'intersection des deux tangentes intérieures ; C et C′ les points de contact de ces deux tangentes, d'un même côté de la ligne des centres ; D et D′ ceux de la tangente extérieure commune aux deux cercles ; soient enfin B et B′ les points respectifs d'intersection des droites AC et AC′ avec la droite BB′. C'est le triangle ABB′ dont l'aire est équivalente au rectangle des rayons.

En effet, dans le triangle ABO, on a (le triangle ACO étant isocèle)

$$(1) \qquad AB = AO\,\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)} = R\sqrt{2}\,\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)};$$

le triangle AB′O donne semblablement

$$AB' = R'\sqrt{2}\,\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\alpha'}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha'}{2}\right)}.$$

α et α' désignent les angles analogues COD, C′O′D′; ces angles étant complémentaires, l'équation précédente peut s'écrire de la manière suivante :

$$(2) \qquad AB' = R'\sqrt{2}\,\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)}.$$

Si nous multiplions membre à membre les équations (1) et (2), il vient, toute réduction faite, et après avoir divisé par 2

$$\frac{1}{2}AB \times AB' = R \times R'.$$

C. Q. F D.