Nouvelles annales de mathématiques

Poudra

Problème sur les cotés d'un triangle élevés à des puissances données

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 15 (1856), p. 217-222

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1856_1_15__217_0>

PROBLÈME SUR LES COTÉS D'UN TRIANGLE ÉLEVÉS A DES PUISSANCES DONNÉES;

PAR M. POUDRA.

[Les signes au-dessus ou au-dessous des lettres α, β, γ, d et o sont des accents.

Les signes au-dessus des lettres a, b, c seulement sont des exposants.]

1°. Partager chaque côté d'un triangle ABC en parties proportionnelles aux puissances successives des côtés adjacents.

2°. Déterminer, dans l'intérieur de ce triangle, la suite des points qui sont tels, que les perpendiculaires abaissées de chacun d'eux sur les côtés soient entre elles comme les puissances successives de ces côtés, de sorte que si on les joint aux sommets du triangle par des droites, sa surface sera partagée en trois autres triangles dont les surfaces seront entre elles comme les puissances successives des côtés respectifs du triangle donné.

3°. Trois nombres a, b, c étant représentés par les trois côtés d'un triangle ABC, on demande de trouver géométriquement la puissance m à laquelle il faut les élever également pour qu'il existe entre eux la relation

$$a^m + b^m = c^m,$$

ou, généralement,

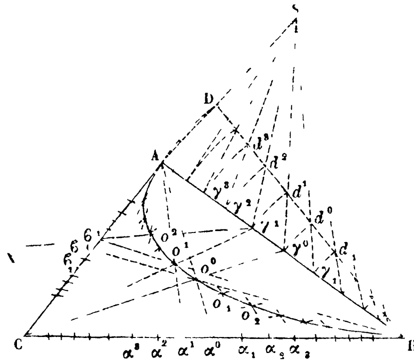
$$\mathrm{A}a^m + \mathrm{B}b^m = \mathrm{C}c^m.$$

Solutions.

1°. Soit ABC le triangle dont les côtés respectifs opposés sont a, b, c. Considérons d'abord le côté $\mathrm{AB} = c$ et soient γ^0 son milieu et γ^1 son intersection avec la bissectrice de l'angle C opposé. On aura déjà

$$\frac{\gamma^0\mathrm{A}}{\gamma^0\mathrm{B}} = \frac{b^0}{a^0} = 1, \quad \frac{\gamma^1\mathrm{A}}{\gamma^1\mathrm{B}} = \frac{b^1}{a^1}.$$

Par le sommet B menons une droite quelconque BD sur laquelle nous portons $BD = BA$, $Bd^0 = B\gamma^0$,



$Bd^1 = B\gamma^1$. Les deux droites AD et $\gamma^0 d^1$ prolongées déterminent le point S. Traçons la droite $S\gamma^1$ qui coupe BD en d^2. Sur AB, on rapporte $B\gamma^2 = b\,d^2$, on tire la droite $S\gamma^2$ qui coupe BD en d^3. La droite Sd^3 donne $B\gamma^3$. La droite $S\gamma^3$ déterminera d^4 et, sur AB on rapporte $B\gamma^4 = Bd^4$, et ainsi de suite indéfiniment.

Pour avoir des divisions analogues sur AB entre γ^0 et B, on porte sur BD la longueur $Bd^0 = B\gamma^0$, on tire Sd^0 ce qui donne sur AB le point γ_1. On prend $Bd_1 = B\gamma_1$. La droite Sd_1 détermine sur AB le point γ_2, et ainsi de suite indéfiniment.

Les deux divisions sur BA et BD sont perspectives réciproques pour le point de vue S. Donc on a entre quatre points de l'une et les homologues de l'autre le rapport anharmonique

$$\frac{Dd^1}{Bd^1} : \frac{Dd^2}{Bd^2} = \frac{A\gamma^0}{B\gamma^0} : \frac{A\gamma^1}{B\gamma^1} = \frac{b^0}{a^0} : \frac{b^1}{a^1} = 1 : \frac{b^1}{a^1};$$

or

$$Dd^1 = A\gamma^1, \quad Bd^1 = B\gamma^1, \quad Dd^2 = A\gamma^2 = \frac{Bd^2}{B\gamma^2}.$$

Donc

$$\frac{A\gamma^1}{B\gamma^1} : \frac{A\gamma^2}{B\gamma^2} = 1 : \frac{b^1}{a^1};$$

et comme

$$\frac{A\gamma^1}{B\gamma^1} = \frac{b^1}{a^1},$$

il en résulte

$$\frac{A\gamma^2}{B\gamma^2} = \frac{b^2}{a^2}.$$

En prenant les points γ^1, γ^2 et les homologues d^2, d^3 on trouverait de même

$$\frac{A\gamma^3}{B\gamma^3} = \frac{b^3}{a^3},$$

et ainsi de suite

$$\frac{A\gamma^4}{B\gamma^4} = \frac{b^4}{a^4}, \qquad \frac{A\gamma^5}{B\gamma^5} = \frac{b^5}{a^5}, \ldots$$

donc on aura

$$\frac{A\gamma^0}{B\gamma^0} = \frac{b^0}{a^0}, \qquad \frac{A\gamma^1}{B\gamma^1} = \frac{b^1}{a^1},$$

$$\frac{A\gamma^2}{B\gamma^2} = \frac{b^2}{b^2}, \qquad \frac{A\gamma^3}{B\gamma^3} = \frac{b^3}{a^3},$$

$$\frac{A\gamma^4}{B\gamma^4} = \frac{b^4}{a^4}, \ldots$$

On trouverait de même

$$\frac{A\gamma_1}{B\gamma_1} = \frac{b^{-1}}{a^{-1}} = \frac{a}{b},$$

$$\frac{A\gamma_2}{B\gamma_2} = \frac{a^2}{b^2}, \qquad \frac{A\gamma_3}{B\gamma_3} = \frac{a^3}{b^3}, \ldots$$

On diviserait de même les côtés a et b.

2°. Chacun des côtés du triangle ABC étant ainsi divisé suivant les puissances successives des côtés adjacents, on joint ces divisions avec le sommet opposé. On démontrera facilement que chaque groupe de trois droites respectives correspondant à une même puissance des côtés adjacents se rencontre en un même point. Soient o, o^1, o^2, o^3, etc., ces points d'intersection.

Appelons p^0, p^1, p^2, etc., les longueurs des perpendiculaires abaissées des points α^0, α^1, α^2, etc., sur le côté AC, et q^0, q^1, q^2, etc., celles abaissées des mêmes points sur AB. On aura

$$p^0 = \alpha^0 \mathrm{C}.\sin \mathrm{C}, \quad p^1 = \alpha^1 \mathrm{C}.\sin \mathrm{C}, \quad p^2 = \alpha^2 \mathrm{C}.\sin \mathrm{C},$$
$$q^0 = \alpha^0 \mathrm{B}.\sin \mathrm{B}, \quad q^1 = \alpha^1 \mathrm{B}.\sin \mathrm{B}, \quad q^2 = \alpha^2 \mathrm{B}.\sin \mathrm{B},$$

d'où

$$\frac{p^0}{q^0} = \frac{\alpha^0 \mathrm{C}}{\alpha^0 \mathrm{B}} \cdot \frac{\sin \mathrm{C}}{\sin \mathrm{B}} = \frac{\alpha^0 \mathrm{C}}{\alpha^0 \mathrm{B}} \cdot \frac{c}{b},$$
$$\frac{p^1}{q^1} = \frac{\alpha^1 \mathrm{C}}{\alpha^1 \mathrm{B}} \cdot \frac{c}{b}, \ldots,$$

et

$$\frac{\alpha^0 \mathrm{C}}{\alpha^0 \mathrm{B}} = \frac{b^0}{a^0} = 1,$$
$$\frac{\alpha^1 \mathrm{C}}{\alpha^1 \mathrm{B}} = \frac{b^1}{a^1}, \quad \frac{\alpha^2 \mathrm{C}}{\alpha^2 \mathrm{B}} = \frac{b^2}{a^2}, \ldots;$$

donc

$$\frac{p^0}{q^0} = \frac{c}{b}, \quad \frac{p^1}{q^1} = \frac{b^0}{c^0} = 1,$$
$$\frac{p^2}{q^2} = \frac{b^1}{c^1}, \quad \frac{p^3}{q^3} = \frac{b^2}{c^2}, \ldots,$$

c'est-à-dire : le rapport des perpendiculaires est égal à celui des côtés sur lesquels elles tombent, élevés à une puissance moindre d'une unité que celle de la division α correspondante.

Il en serait de même pour les rapports des perpendiculaires abaissées des points de division de AB et AC sur les côtés adjacents.

Remarquons que le rapport des perpendiculaires abaissées d'un des points tels que α sur les côtés adjacents est le même que celui des deux perpendiculaires abaissées de tout autre point de la droite $A\alpha$, par conséquent du point o. On en conclut donc : Les perpendiculaires abaissées des divers points o^0, o^1, o^2, etc., sur les trois côtés du triangle, sont entre elles comme les puissances 0, 1, 2, 3, etc., des côtés, mais une unité de moins que celle de la division qui a servi à déterminer ce point o. Ainsi du point o^0 elles sont proportionnelles aux puissances zéro des côtés ; elles sont donc égales. Du point o_1, elles sont proportionnelles aux côtés, de o^2 au carré, de o^3 au cube, et ainsi de suite. (C'est pourquoi on a inscrit o accentué zéro pour le point correspondant à l'intersection des droites $A\alpha_1$, $B6_1$, $C\gamma_1$, et o^1 pour celles $A\alpha^2$, $B6^2$, $C\gamma^2$.)

Si on joint les points o aux sommets du triangle ABC on partagera sa surface en trois autres triangles ayant chacun pour base un des côtés et dont les surfaces seront proportionnelles aux puissances successives de ces côtés, puissance qui sera indiquée par le nombre d'unités de l'indice de o. Ainsi o^m sera le sommet commun de trois triangles dont les surfaces seront proportionnelles aux puissances m des côtés.

3°. En réunissant tous les points o, on obtiendra une courbe transcendante ayant les deux points A et B pour points asymptotiques.

En prenant CA et CB pour les axes des coordonnées, on trouve facilement que l'équation de cette courbe résulterait de l'élimination de m entre deux des trois équations

$$yb^m = x \, . \, c^m,$$
$$a^{m+1} . y = c^{m+1} . b - c^m . b . x,$$
$$a^m . x = c . b^{m+1} - eb^m \, y - b^{m+1} . x,$$

qui sont les équations des trois droites $A\alpha^{m-1}$, $B\beta^{m-1}$, $C\gamma^{m-1}$.

La bissectrice de l'angle C détermine sur le côté AB le point γ'. De même celle de l'angle B détermine sur AC le point β'. La droite $\gamma^1\beta^1$ qui joint ces deux points jouit alors de cette propriété, que la perpendiculaire abaissée d'un point quelconque de cette droite, compris entre AC et CB, sur le côté CB, est égale à la somme des perpendiculaires abaissées du même point sur les deux autres. (Ce serait la différence si le point était extérieur au triangle ABC.) Donc le point o^m où elle coupe la courbe des points o, jouit de cette propriété, mais pour o^m les perpendiculaires sont proportionnelles aux puissances m des côtés; donc pour cette puissance m on aura

$$a^m + b^m = c^m.$$

Ainsi dans le cas représenté dans la figure, on a

$$a = 5, \quad b = 2, \quad c = 3,$$

et on trouve que la droite $\gamma^1\beta^1$ passe par le point o^2 et qu'ainsi on a

$$5^2 = 2^2 + 3^2 = 25.$$

En général, on voit que si l'on construisait la courbe représentant le lieu des points qui jouissent d'une relation donnée entre les simples perpendiculaires abaissées sur les trois côtés du triangle, cette courbe rencontrerait celle des points o en un ou plusieurs points qui donneraient la puissance m à laquelle il faudrait élever les côtés pour avoir, entre les résultats, la relation donnée.