NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

E. COMBESCURE

Solution de la question 311

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 15 (1856), p. 181-183
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1856_1_15__181_0>

SOLUTION DE LA QUESTION 311;

PAR M. E. COMBESCURE.

Déterminer l'aire d'un hyperboloïde de révolution à une nappe limitée par deux parallèles, connaissant la distance de ces deux parallèles, leurs rayons et la portion de génératrice rectiligne qu'ils interceptent.

En désignant par r le rayon d'un parallèle quelconque placé à la distance z du cercle de gorge, l'équation de l'hyperboloïde de révolution est

$$r^2 = a^2 + m^2 z^2,$$

et l'élément de surface de l'hyperboloïde compris entre deux parallèles distants de dz a pour expression

$$d\lambda = 2\pi r d\sigma,$$

où $d\sigma$ représente l'élément de l'hyperbole génératrice, en sorte que

$$d\sigma = \sqrt{dr^2 + dz^2} = \frac{dz\sqrt{a^2 + n^2 z^2}}{r},$$

$$[n^2 = m^2(1 + m^2)].$$

On a donc

$$d\lambda = 2\pi\, dz \sqrt{a^2 + n^2 z^2},$$

et, par suite,

$$\lambda = \frac{\pi}{n}\left\{ \begin{array}{l} nz_2\sqrt{a^2 + n^2 z_2^2} - nz_1\sqrt{a^2 + n^2 z_1^2} \\ + a^2 \log \dfrac{nz_2 + \sqrt{a^2 + n^2 z_2^2}}{nz_1 + \sqrt{a^2 + n^2 z_1^2}} \end{array} \right\},$$

z_2, z_1 étant les z des parallèles qui limitent la portion de surface considérée.

Si r_2, r_1 désignent les rayons de ces mêmes parallèles, en sorte que

$$r_2^2 = a^2 + m^2 z_2^2,$$
$$r_1^2 = a^2 + m^2 z_1^2,$$

l'élimination de m^2 entre ces deux équations donne, en supposant z_2 et z_1 positifs,

$$(1) \qquad \frac{z_2}{z_1} = \sqrt{\frac{r_2^2 - a^2}{r_1^2 - a^2}}.$$

Soient g la portion de génératrice rectiligne interceptée; x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2 les coordonnées de ses extrémités, de façon que

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 = g^2;$$

d'où, en posant

$$g^2 - (h^2 + r_1^2 + r_2^2) = 2p, \quad (z_2 - z_1 = h),$$
$$(2) \qquad x_1 x_2 + y_1 y_2 = p.$$

Les extrémités de g se projetant sur une même tangente au cercle de gorge, on a

$$x_1 \cos\varphi + y_1 \sin\varphi = a,$$
$$x_2 \cos\varphi + y_2 \sin\varphi = a,$$

φ étant un angle arbitraire dont l'élimination donne

$$(3) \qquad x_1 y_2 - y_1 x_2 = \pm a\sqrt{g^2 - h^2}.$$

En ajoutant les équations (2) et (3) après les avoir élevées au carré, il vient

$$r_1^2 r_2^2 = a^2(g^2 - h^2) + p^2;$$

d'où

$$a^2 = \frac{r_1^2 r_2^2 - p^2}{g^2 - h^2}.$$

Substituant dans l'équation (1) cette valeur de a^2 et faisant, pour abréger,

$$p + r_1^2 = p_1, \quad p + r_2^2 = p_2,$$

il vient

$$\frac{z_2}{z_1} = \frac{p_2}{p_1};$$

d'où et de

$$z_2 - z_1 = h$$

on déduit

$$z_2 = \frac{hp_2}{p_2 - p_1}, \quad z_1 = \frac{hp_1}{p_2 - p_1}.$$

On a ensuite

$$m^2 = \frac{r_1^2 - a^2}{z_1^2},$$

c'est-à-dire, à cause de $a^2 = \frac{p_1 p_2 - p(p_1 + p_2)}{p_1 + p_2}$,

$$m^2 = \frac{(p_2 - p_1)^2}{h^2 (p_2 + p_1)}.$$

z_2, z_1, a^2 et m^2 étant connus en p, p_1, p_2, h, ou si l'on veut en r_1, r_2, g et h, on n'aura plus qu'à substituer leurs expressions précédentes dans celle de λ pour répondre complétement à la question. La substitution en elle-même ne présente aucune particularité digne d'être signalée.