

**Troisième démonstration de la possibilité
de décomposer les fonctions algébriques
entières en facteurs réels ; d'après Gauss**

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 15
(1856), p. 134-139

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1856_1_15__134_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1856, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

TROISIÈME DÉMONSTRATION

De la possibilité de décomposer les fonctions algébriques entières en
facteurs réels ;

D'APRÈS GAUSS.

(Gotting. t. III, p. 135; 1816.)

1. Soit

$$X = x^m + A x^{m-1} + B x^{m-2} + C x^{m-3} + \dots + Lx + M;$$

A, B, C, ... sont des coefficients réels.

Faisons

$$x = r (\cos \varphi + \sqrt{-1} \sin \varphi),$$

on obtient

$$X = t + u \sqrt{-1},$$

$$\begin{aligned} t &= r^m \cos m \varphi + A r^{m-1} \cos (m-1) \varphi + B r^{m-2} \cos (m-2) \varphi \\ &\quad + C r^{m-3} \cos (m-3) \varphi + \dots + L r \cos \varphi + M, \\ u &= r^m \sin m \varphi + A r^{m-1} \sin (m-1) \varphi + B r^{m-2} \sin (m-2) \varphi \\ &\quad + C r^{m-3} \sin (m-3) \varphi + \dots + L r \sin \varphi. \end{aligned}$$

Faisons

$$t' = r \frac{dt}{dr},$$

$$u' = r \frac{du}{dr},$$

$$t'' = r \frac{dt'}{dr},$$

$$u'' = r \frac{du'}{dr},$$

$$y = \frac{(t^2 + u^2)(t'' + uu'') + (tu' + ut')^2 - (t' + uu')^2}{r(t^2 + u^2)^2};$$

il est évident que r disparaît du dénominateur.

2. THÉORÈME. Soit R une quantité positive déterminée, arbitraire pourtant et plus grande que les quantités

$$mA \sqrt{2}, \quad \sqrt{mB} \sqrt{2}, \quad \sqrt[3]{mC} \sqrt{2}, \quad \sqrt[4]{mD} \sqrt{2}, \dots$$

abstraction faite des signes ; prenant

$$r = R,$$

$tt' + uu'$ sera une quantité positive, quelque valeur réelle qu'on donne à φ .

Démonstration. Posons

$$\begin{aligned} R \cos 45^\circ + AR^{m-1} \cos (45^\circ + \varphi) + BR^{m-2} \cos (45^\circ + 2\varphi) \\ + CR^{m-3} \cos (45^\circ + 3\varphi) + \dots \\ + LR \cos [45^\circ + (m-1)\varphi] \\ + M \cos (45^\circ + m\varphi) = T. \end{aligned}$$

Désignons par U ce que devient T en remplaçant cosinus par sinus,

$$T' = R \frac{dT}{dR}, \quad U' = R \frac{dU}{dR},$$

$$\begin{aligned} T &= \frac{R^{m-1}}{m \sqrt{2}} [R + mA \sqrt{2} \cos(45^\circ + \varphi)], \\ &+ \frac{R^{m-2}}{m \sqrt{2}} [R^2 + mB \sqrt{2} \cos(45^\circ + 2\varphi)], \\ &+ \frac{R^{m-3}}{m \sqrt{2}} [R^3 + mC \sqrt{2} \cos(45^\circ + 3\varphi)], \\ &+ \frac{R^{m-4}}{m \sqrt{2}} [R^4 + mD \sqrt{2} \cos(45^\circ + 4\varphi)], \\ &+ \dots; \end{aligned}$$

donc, vu les inégalités ci-dessus, T est essentiellement positif, quelque valeur qu'on donne à φ . On démontre de la même manière que T', U et U' sont positifs. Ainsi TT' + UU' est une quantité positive. En faisant $r = R$ dans t, u, t', u' , ces expressions deviennent

$$\begin{aligned} T \cos(45^\circ + m\varphi) + U \sin(45^\circ + m\varphi), \\ T \sin(45^\circ + m\varphi) - U \cos(45^\circ + m\varphi), \\ T' \cos(45^\circ + m\varphi) + U' \sin(45^\circ + m\varphi), \\ T' \sin(45^\circ + m\varphi) - U' \cos(45^\circ + m\varphi), \end{aligned}$$

et $tt' + uu'$ se change en TT' + UU'; donc $tt' + uu'$ est une quantité positive, quelle que soit la valeur de φ , en faisant

$$r = R. \quad \text{c. q. f. d.}$$

Donc aussi $t^2 + u^2$ devenant $T^2 + U^2$ est une quantité positive en faisant

$$r = R,$$

quelle que soit la valeur de φ ; ainsi t et u ne peuvent devenir simultanément nuls tant que $r = R$.

3. THÉORÈME. Lorsque r est compris entre 0 et R , et φ est compris entre 0 et 360 , il existe des valeurs de r et de φ qui rendent simultanément nuls t et u .

Démonstration. Supposons au contraire que dans ces intervalles t et u ne peuvent jamais s'évanouir simultanément. Alors dans ces mêmes intervalles y (p. 135) sera toujours une quantité finie; cette hypothèse mène à une absurdité. En effet, soit la double intégrale

$$\int_0^R \int_0^{360} y dr d\varphi = \Omega;$$

intégrant par rapport à φ , on a indéfiniment

$$\int y d\varphi = \frac{tu' - ut'}{r(t^2 + u^2)} + \text{constante.}$$

Faisant

$$\varphi = 0,$$

u et u' s'évanouissent; donc la constante est nulle en faisant commencer l'intégrale à $\varphi = 0$.

Mais posant

$$\varphi = 360^\circ,$$

u et u' s'évanouissent encore. Donc, dans l'intervalle,

$$\int_0^{360} y d\varphi = 0,$$

quelle que soit la valeur de r . Donc

$$\Omega = 0.$$

On doit obtenir la même valeur en commençant l'intégration par r ; alors

$$\int y dr = \frac{tt' + uu'}{t^2 + u^2};$$

on n'ajoute pas non plus de constante, l'intégrale commençant à

$$r = 0,$$

et alors

$$t' = 0, \quad u' = 0;$$

donc l'intégrale dans l'étendue de $r = 0$ à $r = R$ se change en $\frac{TT' + UU'}{T^2 + U^2}$, quantité essentiellement positive pour toute valeur de φ (p. 136). Donc Ω n'est pas nul; ce qui établit une contradiction; l'hypothèse est donc inadmissible. Ainsi γ ne conserve pas une valeur constamment finie dans les intervalles indiqués.

4. Nous avons vu qu'en remplaçant dans X la valeur de x par

$$x = r(\cos \varphi + \sqrt{-1} \sin \varphi),$$

X se change en $t + u \sqrt{-1}$, et de même en $t - u \sqrt{-1}$, en faisant

$$x = r(\cos \varphi - \sqrt{-1} \sin \varphi).$$

Si donc pour des valeurs déterminées de r et de φ , savoir pour

$$r = g, \quad \varphi = G,$$

t et u s'annulent simultanément (l'existence de telles valeurs a été démontrée), alors par la substitution de

$$x = g(\cos G + \sqrt{-1} \sin G)$$

et

$$x = g(\cos G + \sqrt{-1} \sin G),$$

X devient nul et deviendra divisible par

$$x - g(\cos G + \sqrt{-1} \sin G)$$

et par

$$x - g (\cos G - \sqrt{-1} \sin G);$$

et toutes les fois qu'on n'a pas ni $g = 0$, ni $G = 0$, ces diviseurs sont inégaux et X sera divisible par leur produit

$$x^2 - 2g \cos G x + g,$$

et toutes les fois qu'on a soit $\cos G = \pm 1$ ou $G = 0$, les deux facteurs sont identiques, savoir $x - g$. Il est donc certain que X a un diviseur réel, soit du second degré, soit du premier, et comme la même conclusion subsiste pour le quotient, X sera entièrement décomposable en de tels facteurs.