Nouvelles annales de mathématiques

Faure

Théorème sur la somme des puissances semblables des racines (Brioschi)

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 14 (1855), p. 94-97

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1855_1_14__94_1>

THÉORÈME SUR LA SOMME DES PUISSANCES SEMBLABLES DES RACINES (BRIOSCHI);

PAR M. FAURE.

Je viens de trouver une démonstration du théorème de M. Brioschi (*Nouvelles Annales*, tome XIII, page 352), relativement aux sommes des puissances semblables des racines d'une équation. Elle est un cas particulier d'un théorème beaucoup plus général, lequel donne une théorie complète des fonctions symétriques.

(*) Il n'est pas inutile d'observer que, la courbe étant symétrique par rapport à l'axe des x, on peut supposer sans restreindre la généralité de la démonstration que la quantité β soit positive; alors les équations (11) se rapportent au cas des ordonnées y', y'', y''' positives; mais si y' est positive et les deux autres y'', y''' sont négatives, au lieu des équations (11), on aura

$$y\sqrt{mx'} + \left(\alpha\sqrt{mx'} + \sqrt{x''x'''} - x'\right)x + ab = 0,$$
$$y\sqrt{mx''} + \left(\alpha\sqrt{mx''} + \sqrt{x'x'''} + x''\right)x - ab = 0,$$
$$y\sqrt{mx'''} + \left(\alpha\sqrt{mx'''} + \sqrt{x'x''} + x'''\right)x - ab = 0,$$

et l'on continuera la démonstration de la même manière.

En nommant $x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3, x_4, y_4$ les coordonnées des quatre points de contact correspondants au point x', y', on déduit des équations (5) et (6),

$$(9) \qquad x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4x',$$
$$(10) \qquad y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 8y'.$$

Donc le point $x', -2y'$ est le centre des moyennes distances des quatre points de contact, et le point $x', -y'$ est le centre des moyennes distances des points de contact de toutes les six tangentes qui passent par le point x', y'.

Si l'on divise le polynôme

$$\Pi(x) = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + a_2 x^{m-2} + \ldots a_r x^{m-r} \ldots$$

par le polynôme

$$F(x) = \alpha_0 x^n + \alpha_1 x^{n-1} + \alpha_2 x^{m-2} + \ldots,$$

et que l'on représente le quotient par

$$A_0 x^{m-n} + A_1 x^{m-n-1} + A_2 x^{m-n-2} + \ldots + A_r x^{m-n-r} + \ldots,$$

on trouve aisément qu'un terme quelconque de quotient tel que A_r a pour valeur

$$A_r = \frac{1}{(\alpha_0)^{r+1}} \begin{vmatrix} \alpha_0 & 0 & 0 & 0 \ldots & \ldots & a_0 \\ \alpha_1 & \alpha_0 & 0 & 0 \ldots & \ldots & a_1 \\ \alpha_2 & \alpha_1 & \alpha_0 & 0 \ldots & \ldots & a_2 \\ \alpha_3 & \alpha_2 & \alpha_1 & \alpha_0 \ldots & \ldots & a_3 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_r & \alpha_{r-1} & \alpha_{r-2} & \alpha_{r-3} \ldots & \ldots & a_r \end{vmatrix}.$$

C'est ce principe bien simple qui développé mène à de nombreuses conséquences; ainsi, relativement aux fonctions symétriques, on sait que si l'on veut avoir la somme des valeurs que prend une fonction entière $\varphi(x)$ dans laquelle on remplace x successivement par toutes les racines d'une équation

$$F(x) = 0,$$

il faut effectuer la division $\frac{F'(x)\varphi(x)}{F(x)}$, et la somme que l'on demande est le coefficient du terme en $\frac{1}{x}$ du quotient

Supposons que $\Pi(x) = F'(x)\ \varphi(x)$ et que $\varphi(x)$ soit de degré r; le terme $A_r x^{m-n-r}$ pour lequel $m - n - r = -1$ donnera A_r pour la fonction symétrique cherchée.

Si l'on a égard au procédé indiqué par M. Transon, on voit que la méthode précédente conduit à la détermination d'une fonction symétrique quelconque, et je substitue ainsi des multiplications aux divisions de M. Transon.

Si l'on suppose en particulier que $\varphi(x) = 1$, le quotient $\frac{F'(x)}{F(x)}$ donnera la somme des puissances des racines de $F(x) = 0$.

Notre valeur de A_r devient alors, en observant que

$$a_0 = m\alpha_0 \quad a_1 = (m-1)\alpha_1, \ldots,$$

$$A_r = \frac{1}{(\alpha_0)^{r+1}} \begin{vmatrix} \alpha_0 & 0 & \ldots\ldots\ldots m\,\alpha_0 \\ \alpha_1 & \alpha_0 & \ldots(m-1)\,\alpha_1 \\ \alpha_2 & \alpha_1 & \ldots(m-2)\,\alpha_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_r & \alpha_{r-1} & \ldots(m-r)\,\alpha_r \end{vmatrix},$$

et de là

$$A_r(-\alpha_0)^{r+1} = \begin{vmatrix} 0 & \alpha_0 & 0 \ldots\ldots & 0 \\ \alpha_1 & \alpha_1 & \alpha_0 \ldots\ldots & 0 \\ 2\alpha_2 & \alpha_2 & \alpha_1 \ldots\ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots \\ r\alpha_r & \alpha_r & \alpha_{r-1} \ldots & \alpha_1 \end{vmatrix}.$$

Cette relation revient à celle de M. Brioschi, il suppose seulement $\alpha_0 = 1$.

Relativement à la division numérique, dans un système quelconque, on arrive à ceci : supposez que l'on veuille diviser le nombre

$$5312367 \quad \text{par} \quad 23457,$$

écrit, par exemple, dans le système décimal; le quotient sera de la forme

$$A_0\,100 + A_1\,10 + A_2.$$

Or on a, d'après notre valeur générale de A_r,

$$A_0 = \frac{5}{2}, \quad A_1 = \frac{1}{4}\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = -\frac{9}{4}, \quad A_2 = \frac{1}{8}\begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 3 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

ou

$$A_2 = -\frac{9}{8};$$

donc le quotient entier est

$$\frac{1}{8}(2000 - 180 - 9) = \frac{1811}{8} = 226,$$

comme on peut le vérifier directement.

On voit de plus que les seuls chiffres qui servent à déterminer le quotient sont 531 dans le dividende, 234 dans le diviseur, et généralement autant de chiffres qu'il doit y en avoir au quotient. Ainsi le quotient des deux nombres précédents revient à celui de 53100 par 234.

Il y a encore d'autres conséquences relatives à la valeur du reste de la division de deux polynômes, aux séries récurrentes, aux fonctions sturmiennes, etc.

Note. Au moyen des déterminants, l'habile analyste M. Sylvester vient de trouver la solution générale de ce problème : *Étant donné un coefficient différentiel d'un ordre quelconque, pour un nombre quelconque de variables, trouver ce que devient ce coefficient pour un changement de système de variables.* Problème qui n'a été résolu par Burmann et Jacobi que pour une seule variable.

TM.