FORTUNATO PADULA

Solution de la question 280

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 14 (1855), p. 89-94

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1855_1_14__89_1>

SOLUTION DE LA QUESTION 280

(voir t. XII, p. 327),

PAR M. FORTUNATO PADULA,
Professeur à Naples.

Une courbe du troisième ordre étant composée d'une branche infinie et d'un ovale, si l'on prend sur la branche infinie trois points en ligne droite, et que par chacun de ces points on mène deux tangentes à l'ovale, les trois cordes de contact passent par un même point.

(CHASLES.)

Lorsque la branche infinie devient une droite, l'ovale se change en conique et l'on revient au théorème de La Hire.

La propriété dont il s'agit dans cette question étant projective, nous nous bornerons à la démontrer pour la courbe donnée par l'équation

$$my^2 = x(x+a)(x+b), \tag{1}$$

où l'on supposera les quantités m, a, b positives et $a<b$.

Cette courbe est composée d'un ovale dont les points de l'axe des x qui ont pour abscisses respectives $x = -a$, $x = -b$ sont deux sommets, et d'une autre branche qui a deux points d'inflexion à distance finie et s'étend à l'infini au-dessus et au-dessous de l'axe des x vers le troisième point d'inflexion.

Nommons x', y' les coordonnées d'un point quelconque de la courbe et x, y celles du point de contact d'une des tangentes menées à la courbe par le point x', y'; on aura l'équation

$$(2) \left\{ \begin{aligned} 2myy' &= [3x^2 + 2(a+b)x + ab]x' - x^3 + abx \\ &= 2(x+a)(x+b)x' + (x^2 - ab)(x' - x): \end{aligned} \right.$$

mais l'équation (1) donne

$$my'^2 = x'(x'+a)(x'+b);$$

donc on obtiendra

$$(3) \left\{ \begin{aligned} &4xx'(x+a)(x+b)(x'+a)(x'+b) \\ &= [2(x+a)(x+b)x' + (x^2 - ab)(x' - x)]^2. \end{aligned} \right.$$

En réunissant tous les termes multipliés par

$$4x'(x+a)(x+b),$$

cette équation est divisible par $(x' - x)^2$, comme cela doit être, et l'on obtient l'équation du quatrième degré en x

$$(4) \qquad (x^2 - ab)^2 = 4x'(x+a)(x+b)x.$$

Lorsque l'abscisse x' est négative, les racines de cette équation sont toutes imaginaires, et réelles lorsqu'elle est positive: dans ce cas, l'équation (4) a deux racines positives et deux négatives. Donc, par un point quelconque pris sur la branche infinie, on peut mener à la courbe quatre tangentes dont deux touchent la même branche et les deux autres l'ovale. Il est évident que l'on ne considère pas les deux tangentes réunies dans la même droite qui touche la courbe au point (x, y) et qui sont données par les deux racines égales $x = x'$ de l'équation (3). L'équation (4) peut se décomposer dans les deux équations de second degré

$$(5)\qquad x^2 + 2\left[\sqrt{(x'+a)(x'+b)} - x'\right]x + ab = 0,$$

$$(6)\qquad x^2 - 2\left[\sqrt{(x'+a)(x'+b)} + x'\right]x + ab = 0,$$

dont la première, ayant les racines négatives, donne les abscisses des points de contact sur l'ovale, et la seconde a les racines positives et donne les abscisses des deux autres points. On voit cependant que, *quel que soit le point* x′, y′, *le rectangle des abscisses des points de contact sur l'ovale est constant et égal au rectangle des abscisses des deux autres points de contact sur la branche infinie.*

Les équations (5), (6) donnent les valeurs des abscisses des points de contact. Quant à la valeur de y correspondante à chaque valeur de x, on pourrait la déduire de l'équation (1) qui, ayant égard à l'équation (4), donne

$$(7)\qquad y = \pm\frac{x^2 - ab}{2\sqrt{mx'}},$$

mais il resterait à déterminer lequel des signes + ou — on doit prendre pour chaque valeur de x. Et, par conséquent, il vaut mieux prendre la valeur de y de l'équation (2), et, ayant toujours égard à l'équation (4), on aura

$$2myy' = \frac{(x^2 - ab)^2}{2x} + (x^2 - ab)(x' - x) = \frac{x^2 - ab}{2x}(2xx' - x^2 - ab);$$

mais les équations (5), (6) donnent

$$\frac{2xx' - x^2 - ab}{2x} = \pm\sqrt{(x'+a)(x'+b)}:$$

donc on aura

$$(8)\qquad y = \pm\frac{(x^2 - ab)\sqrt{(x'+a)(x'+b)}}{2my'},$$

où l'on doit prendre le signe supérieur pour les points de contact sur l'ovale et le signe inférieur pour les deux autres. La valeur (8) de y, en y substituant pour y' sa valeur, se réduit à la valeur (7), et l'on voit que, lorsqu'il s'agit des points de contact sur l'ovale, on doit prendre dans l'équation (7) le signe supérieur ou inférieur selon que la valeur y' est positive ou négative : le contraire a lieu pour les deux autres points de contact. L'équation (7), ayant égard à un seul signe, représente une parabole qui passe toujours par les points de l'axe des x qui ont pour abscisses $\pm\sqrt{ab}$. Donc

Si, par un point quelconque de la branche infinie, on mène les quatre tangentes à la courbe, les deux points de contact sur l'ovale et les symétriques des deux autres points de contact sont sur une parabole du second degré qui a pour axe la tangente au sommet de la branche infinie et qui passe toujours par deux mêmes points de l'axe de la courbe.

L'équation (8) donne immédiatement les équations des deux cordes de contact pour l'ovale et pour la branche infinie. En effet, substituant pour x^2 sa valeur tirée des équations (5) (6), on obtiendra

$$y = -\frac{\sqrt{(x'+a)(x'+b)}}{my'}\left[\left(\sqrt{(x'+a)(x'+b)} - x'\right)x + ab\right],$$

$$y = -\frac{\sqrt{(x'+a)(x'+b)}}{my'}\left[\left(\sqrt{(x'+a)(x'+b)} + x'\right)x - ab\right],$$

ou bien

$$(9)\qquad y\sqrt{mx'} + \left(\frac{my'}{\sqrt{mx'}} - x'\right)x + ab = 0,$$

$$(10)\qquad y\sqrt{mx'} + \left(\frac{my'}{\sqrt{mx'}} + x'\right)x - ab = 0,$$

qui expriment deux droites, dont la première est la corde des deux contacts sur l'ovale, et la seconde des deux points sur la branche infinie; dans ces équations on doit prendre $\sqrt{mx'}$ avec le même signe de y', comme il résulte de ce qu'on a dit ci-dessus, c'est-à-dire que si l'ordonnée y'

est négative, on doit changer les signes de x' et de ab dans les équations (9) et (10).

Cela posé, soit

$$y = \alpha x + \beta,$$

l'équation d'une droite qui coupe la branche infinie en trois points (x', y'), (x'', y''), (x''', y'''); les abscisses x', x'', x''' seront les racines de l'équation

$$m(\alpha x + \beta)^2 = x(x+a)(x+b),$$

d'où

$$\beta = \sqrt{\frac{x' x'' x'''}{m}},$$

et, par conséquent, l'équation (9) donnera, pour les trois cordes de contact correspondantes sur l'ovale aux points (x', y'), (x'', y''), (x''', y'''),

$$(11)\quad \left\{\begin{array}{l} y\sqrt{mx'} + \left(\alpha\sqrt{mx'} + \sqrt{x'' x'''} - x'\right)x + ab = 0, \\ y\sqrt{mx''} + \left(\alpha\sqrt{mx''} + \sqrt{x' x'''} - x''\right)x + ab = 0, \\ y\sqrt{mx'''} + \left(\alpha\sqrt{mx'''} + \sqrt{x' x''} - x'''\right)x + ab = 0, \end{array}\right.$$

et puisque le déterminant

$$\begin{vmatrix} ab & \alpha\sqrt{mx'} + \sqrt{x'' x'''} - x' & \sqrt{mx'} \\ ab & \alpha\sqrt{mx''} + \sqrt{x' x'''} - x'' & \sqrt{mx''} \\ ab & \alpha\sqrt{mx'''} + \sqrt{x' x''} - x''' & \sqrt{mx'''} \end{vmatrix}$$

$$= ab\sqrt{m}\begin{vmatrix} 1 & \sqrt{x'' x'''} - x' & \sqrt{x'} \\ 1 & \sqrt{x' x'''} - x'' & \sqrt{x''} \\ 1 & \sqrt{x' x''} - x''' & \sqrt{x'''} \end{vmatrix}$$

$$= ab\sqrt{mx' x'' x'''}\begin{vmatrix} 1 & \dfrac{1}{\sqrt{x'}} & \sqrt{x'} \\ 1 & \dfrac{1}{\sqrt{x''}} & \sqrt{x''} \\ 1 & \dfrac{1}{\sqrt{x'''}} & \sqrt{x'''} \end{vmatrix} - ab\sqrt{m}\begin{vmatrix} 1 & x' & \sqrt{x'} \\ 1 & x'' & \sqrt{x''} \\ 1 & x''' & \sqrt{x'''} \end{vmatrix} = 0,$$

il s'ensuit que les trois droites exprimées par les équations (11) passent par un même point (*).

Note. La propriété est projective; par conséquent, elle existe pour une courbe du troisième degré à deux branches séparées, pourvu que l'une d'elles ne puisse être coupée par une droite qu'en deux points. Tm.