Nouvelles annales de mathématiques

Combescure

Solution de la question 256

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 14 (1855), p. 84-85

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1855_1_14__84_0>

SOLUTION DE LA QUESTION 256

(voir t. X, p. 256);

PAR M. COMBESCURE,
Professeur.

Soit un quadrilatère ABCD circonscrit à un cercle; on décrit un second cercle touchant le côté AB en B et le côté CD, puis un troisième cercle touchant le côté AD en D et le côté BC. La droite qui va du point A au centre du second cercle fait avec le côté AB un angle égal à l'angle que fait la droite qui va de A au centre du troisième cercle avec le côté AD. (QUIDDE.)

Soient O le centre du cercle inscrit au quadrilatère ou le point de concours des bissectrices des angles A, E, F, B (*); I, I′ les centres des deux cercles obtenus par l'intersection des bissectrices EO, FO avec les perpendiculaires BI, DI′ aux côtés AB, AD. En désignant par A, B, C, D les angles du quadrilatère, le triangle BOE donne

$$\text{angle BOE} = \frac{1}{2}B - \frac{1}{2}E = \frac{1}{2}B - \frac{1}{2}\left(180^\circ - \overline{A+D}\right)$$
$$= \frac{A+B+D-180^\circ}{2} = 90^\circ - \frac{C}{2}.$$

On aurait semblablement

$$\text{angle DOF} = 90^\circ - \frac{C}{2}.$$

Les triangles BOI, DOI′ donneront dès lors

$$BI = \frac{BO.\cos\frac{C}{2}}{\sin BIO} = \frac{BO.\cos\frac{C}{2}}{\cos\frac{E}{2}} = \frac{BO.\cos\frac{C}{2}}{\sin\frac{A+D}{2}},$$

$$DI' = \frac{DO.\cos\frac{C}{2}}{\sin DI'O} = \frac{DO.\cos\frac{C}{2}}{\sin\frac{A+D}{2}}.$$

(*) E est l'intersection de AB, CD, et F l'intersection de BC, AD.

Mais

$$\mathrm{BO} = \frac{\mathrm{AB}.\sin\frac{\mathrm{A}}{2}}{\sin\frac{\mathrm{A}+\mathrm{B}}{2}}, \quad \mathrm{DO} = \frac{\mathrm{AD}.\sin\frac{\mathrm{A}}{2}}{\sin\frac{\mathrm{A}+\mathrm{D}}{2}};$$

donc

$$\frac{\mathrm{BI}}{\mathrm{AB}} = \frac{\sin\frac{\mathrm{A}}{2}\cos\frac{\mathrm{C}}{2}}{\sin\frac{\mathrm{A}+\mathrm{B}}{2}\sin\frac{\mathrm{A}+\mathrm{D}}{2}} = \frac{\mathrm{DI'}}{\mathrm{AD}}.$$

Les triangles rectangles IBA, I'DA sont donc semblables, et, partant, les lignes AI, AI' sont également inclinées respectivement sur les côtés AB, AD. C. Q. F. D.