P. BRETON

Propriétés générales des courbes algébriques planes, diamètres bissecteurs

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 14 (1855), p. 7-19

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1855_1_14__7_0>

PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES DES COURBES ALGÉBRIQUES PLANES, DIAMÈTRES BISSECTEURS;

Par M. P. BRETON (de Champ),
Ingénieur des Ponts et Chaussées.

Les diamètres dont il est question dans cet article sont, comme pour les lignes du second ordre, des droites divisant en deux parties égales une suite de cordes parallèles entre elles.

On doit entendre expressément cette définition dans ce sens, que, si d'un point quelconque de la courbe on mène une droite jusqu'au diamètre, parallèlement aux cordes qu'il divise en parties égales ou qui lui sont *conjuguées*, et que l'on prolonge cette droite d'une quantité égale à sa longueur, le point ainsi obtenu appartient à la courbe (*).

Théorème I. *Quand l'équation d'une courbe est irréductible, aucune de ses branches ne peut avoir un diamètre qui ne soit pas un diamètre général.*

S'il existe un diamètre particulier, divisant les cordes d'une branche de la courbe, mais non de la courbe entière, en deux parties égales, on pourra le prendre pour axe des x, et prendre pour axe des y une parallèle aux cordes conjuguées. Soit alors

$$F(x, y) = 0$$

l'équation de la courbe, sous forme rationnelle et entière,

(*) Ces recherches se confondent, en quelques points, avec celles que renferme le Mémoire posthume de Wantzel, inséré dans le *Journal* de M. Liouville, tome XIV, page 111. Cette publication est trop récente pour qu'il soit nécessaire de signaler ici ce qui appartient à ce géomètre.

Il faut que, pour chaque valeur de x,

$$F(x, y) = 0$$

donne deux valeurs au moins de y égales et de signes contraires, et d'autres ayant entre elles des relations différentes ; en d'autres termes, $F(x,y)$ doit contenir à la fois des puissances impaires et des puissances paires de y. Par conséquent, si l'on change le signe de y, l'équation

$$F(x, -y) = 0$$

donnera pour y un certain nombre de valeurs comprises parmi celles déduites de $F(x, y) = 0$, et d'autres qui leur seront étrangères. Il y aura donc un commun diviseur entre $F(x, y)$ et $F(x, -y)$, et ce diviseur sera nécessairement d'un degré moindre que celui de l'équation proposée. D'après le procédé connu qui sert à l'obtenir, ce diviseur ne pourra qu'être entier en x, y, de sorte que l'on aura

$$F(x, y) = \varphi(x, y) \times \psi(x, y),$$

$\varphi(x, y)$ étant le diviseur en question, et $\psi(x, y)$ le quotient de la division de $F(x, y)$ par $\varphi(x, y)$. On pourrait donc décomposer la courbe proposée en deux autres ayant pour équations

$$\varphi(x, y) = 0, \qquad \psi(x, y) = 0.$$

Or nous avons supposé $F(x, y)$ irréductible : donc il est impossible que la courbe qui a pour équation

$$F(x, y) = 0,$$

ait un diamètre qui soit particulier, par exemple, à une de ses branches et étranger aux autres.

Scholie. En général, on ne peut supposer, entre quelques-unes des valeurs de y qui satisfont à une équation irréductible $F(x, y) = 0$, une relation qui ne soit pas commune à toutes ces valeurs. Soit en effet, s'il est possible, $f(y_1, y_2) = 0$ une telle relation sous forme rationnelle et entière. Comme on a en même temps

$$F(x, y_2) = 0,$$

si l'on élimine y_2 entre cette équation et la précédente, l'équation finale obtenue entre x et y_1 aura un certain nombre de racines communes avec $F(x_1, y_1) = 0$, et *non toutes,* puisque, par hypothèse, la relation

$$f(y, y_2) = 0$$

est restreinte à certaines valeurs de y. Donc il y aura entre les premiers membres de ces deux équations un commun diviseur de degré moindre que celui de $F(x, y)$; donc $F(x, y)$ ne serait pas irréductible, contrairement à l'hypothèse. C'est ainsi, par exemple, qu'il n'existe aucune courbe à équation irréductible, dans laquelle une suite de cordes parallèles soient divisées par une ligne droite en segments ayant entre eux un rapport constant autre que l'unité.

THÉORÈME II. *Il ne peut y avoir, pour chaque diamètre d'une courbe algébrique à équation irréductible, qu'un seul système de cordes conjuguées à ce diamètre.*

Soit, s'il est possible, m_1 le point d'une courbe possédant un diamètre conjugué à la fois à deux systèmes de cordes affectant des directions différentes, et $m_1 m_2$ la corde appartenant à l'un de ces systèmes. Construisons la corde $m_2 m_3$ appartenant au second système, puis les cordes $m_3 m_4$, $m_4 m_5$, $m_5 m_6$, tour à tour dans l'un et dans l'autre système. On aura ainsi une ligne brisée indéfinie, et les points m_1, m_2, m_3, m_4, m_5, etc., seront sur deux droites parallèles au diamètre. Or il est évident, par cette construction, que le nombre des points que l'on peut ainsi obtenir est infini, de sorte que la courbe serait coupée par deux droites en un nombre infini de points. Ce qui ne saurait avoir lieu pour une courbe algébrique, à moins que ces deux droites n'en fassent partie, auquel cas l'équation de la courbe serait décomposable contrairement à l'hypothèse; donc, etc.

THÉORÈME III. *Une courbe algébrique à équation irréductible qui a deux diamètres non conjugués en a nécessairement un troisième.*

Soient OD$'$, OD$''$ les deux diamètres supposés et m_1 un point quelconque de la courbe. Ayant construit les points m_2, m_3 sur les cordes $m_1 m_2$, $m_1 m_3$ conjuguées respectivement à OD$'$, OD$''$, et ensuite au moyen de m_2 le point m_4, sur la corde $m_2 m_4$, parallèle à $m_1 m_3$, ou conjuguée à OD$''$, je dis que la droite OD$'''$, qui divise $m_3 m_4$ en deux parties égales, est un nouveau diamètre de la courbe.

En effet, par cette construction, la figure $m_1 m_2 m_3 m_4$ est un trapèze, dont les côtés parallèles $m_1 m_3$, $m_2 m_4$ ont leurs milieux sur la droite OD$''$. Il suit de là que, de part et d'autre de ce diamètre, à l'inclinaison près des cordes qui lui sont conjuguées, tout est symétrique. Donc les cordes telles que $m_3 m_4$, qui répondent à un système de cordes parallèles, conjuguées à OD$'$, sont aussi parallèles entre elles; et, de ce que les milieux des unes sont en ligne droite, on en conclut que les milieux des autres sont également sur une ligne droite, laquelle coupe OD$''$ au même point que OD$'$ et, par conséquent, passe en O.

Il est évident que OD$'''$ ne peut être le prolongement de OD$''$; il ne peut l'être non plus de OD$'$, car les cordes $m_1 m_2$, $m_3 m_4$ n'étant point parallèles, puisque les diamètres OD$'$, OD$''$ sont supposés non conjugués entre eux, il faudrait admettre que la droite D$'$ D$'''$ est conjuguée à deux systèmes de cordes de directions différentes, ce qui ne saurait être, d'après le théorème qui précède.

Remarque. On ne peut pas supposer que les cordes conjuguées à deux diamètres différents soient de même direction, ou, ce qui revient au même, qu'à un système de cordes parallèles puissent répondre deux diamètres distincts. Il est facile de voir qu'autrement il y aurait sur chaque corde un nombre infini de points appartenant à la courbe, ce qui ne peut avoir lieu pour une courbe algébrique.

THÉORÈME IV. *Une courbe algébrique à équation irréductible ne peut avoir deux diamètres parallèles entre eux.*

Il faut excepter la parabole qui a une infinité de diamètres parallèles entre eux, et la ligne droite qui en est un cas particulier.

Cela posé, soient, s'il est possible, $d'D'$, $d''D''$ deux diamètres parallèles d'une courbe algébrique; il y en aura un troisième $d'''D'''$, que l'on obtiendra par une construction toute semblable à celle qui nous a servi dans le théorème III. On en trouvera de la même manière un quatrième, puis un cinquième, etc., et tous seront parallèles entre eux. Or il résulte de ce mode de construction que si l'on fait passer par le point m_1 de la courbe et par les points m_2, m_3 qui s'en déduisent, une parabole ayant son axe parallèle aux diamètres dont il s'agit, tous les autres points en nombre infini, tels que m_4, qu'on peut obtenir, de proche en proche, au moyen du point de départ m_1 et des divers diamètres, appartiendront à cette parabole, qui couperait ainsi une courbe algébrique en un nombre infini de points, ce qui ne saurait avoir lieu, à moins que la parabole ne fasse partie de la courbe elle-même. Mais alors l'équation de celles-ci serait décomposable, contrairement à l'hypothèse; donc, etc.

THÉORÈME V. *Les points d'une courbe algébrique à équation irréductible que l'on peut construire au moyen d'un de ses points et de ses diamètres, sont toujours sur une ellipse, et jamais sur une hyperbole.*

On doit excepter de cet énoncé le cas où la courbe n'a que deux diamètres, lesquels sont nécessairement conjugués entre eux.

Nous avons vu, par le théorème III, comment deux diamètres OD′, OD″ d'une courbe étant connus, ainsi que les directions des cordes qui leur sont respectivement conjuguées, on peut, au moyen d'un point m_1, construire de nouveaux points m_2, m_3, m_4, puis un troisième diamètre OD‴. Rien n'empêche de continuer la même construction au moyen des diamètres OD″, OD‴ et du point m_3, et de déterminer ainsi d'autres points et d'autres diamètres. Il est toujours possible de faire passer par les trois points m_1, m_2, m_3 une section conique dont le point O soit le centre. Or, par la nature même des constructions que l'on vient de rappeler, les points m_4, m_5, etc., appartiennent évidemment à cette section conique, je dis maintenant que celle-ci ne peut être qu'une ellipse.

Admettons en effet, pour un instant, que cette courbe soit une hyperbole, et que les points m_1, m_2, m_3 soient situés sur la même branche. Il en sera de même de m_4, obtenu en conjuguant $m_1\, m_4$ à OD″; de m_5 obtenu en conjuguant $m_2\, m_5$ à OD‴, etc. On resterait donc ainsi sur la même branche, laquelle rencontrerait la courbe proposée en un nombre infini de points, ce qui ne saurait avoir lieu, cette courbe étant algébrique, à moins toutefois que l'hyperbole n'en fasse partie. Mais alors son équation serait décomposable, contrairement à l'hypothèse.

Si l'un des trois points m_1, m_2, m_3 ne se trouvait pas sur la même branche que les deux autres, on trouverait facilement deux diamètres de la courbe rencontrant l'hyperbole, et l'on serait ramené au cas précédent.

Donc il est impossible que la section conique qui a pour centre le point O, et qui passe par les points m_1, m_2, m_3 soit une hyperbole; donc elle ne peut être qu'une ellipse.

Théorème VI. *L'ensemble de tous les diamètres d'une courbe algébrique à équation irréductible forme une rosette elliptique.*

Bien qu'il ne soit pas encore établi que les diamètres déterminés en vertu des théorèmes précédents, et se coupant en un même point, forment l'*ensemble de tous les diamètres de la courbe,* j'admettrai provisoirement cette proposition, qui sera démontrée plus loin.

Cette réserve faite, on remarquera qu'il est permis, sans diminuer la généralité du théorème qui nous occupe, de supposer les deux diamètres OD′, OD″ choisis de telle manière qu'il ne s'en trouve aucun autre entre eux.

Les secteurs $m_1\,\mathrm{O}\,m_2$, $m_2\,\mathrm{O}\,m_3$, $m_3\,\mathrm{O}\,m_4$ formés par les rayons menés du centre aux points m_1, m_2, m_3, etc., dans l'ellipse, que, d'après le théorème précédent, on peut toujours faire passer par ces points, sont divisés respectivement en deux parties équivalentes par les diamètres OD′, OD″, OD‴, etc., qui passent par les milieux des cordes $m_1\,m_2$, $m_2\,m_3$, $m_3\,m_4$, etc. Le secteur $m_1\mathrm{O}m_4$ étant de même divisé en deux parties équivalentes par le diamètre OD″ qui passe par le milieu de $m_1\,m_4$, on en conclut que les secteurs compris dans les angles D′OD″, D″OD‴ sont équivalents entre eux. Il résulte de là que le secteur déterminé par les deux diamètres consécutifs OD′, OD″ est nécessairement une partie aliquote de l'aire de la demi-ellipse. S'il en était autrement, l'un des diamètres obtenus en formant une suite de secteurs équivalents, ou son prolongement, tomberait dans l'angle D′OD″, contrairement à l'hypothèse. Donc l'ensemble des diamètres divise l'ellipse en secteurs équivalents, ce qui est la définition même de la *rosette elliptique.*

Théorème VII. *Une courbe de l'ordre* n *à équation irréductible ne peut avoir plus de* n *diamètres.*

Car, d'après le théorème qui vient d'être démontré, le nombre des points d'intersection de la courbe avec l'ellipse $m_1\, m_2\, m_3 \ldots$, est égal à deux fois le nombre des diamètres. Si ce dernier surpassait n, le nombre des intersections surpasserait m. Or une ligne de l'ordre n ne peut être rencontrée en plus de $2n$ points par une ligne du second ordre; donc, etc.

Remarque. Une ligne d'ordre impair à équation irréductible ne peut avoir un nombre pair de diamètres, mais une ligne d'ordre pair peut en avoir un nombre impair.

En effet, quand les diamètres sont en nombre pair, ils peuvent se combiner deux à deux comme les diamètres conjugués d'une ellipse, ainsi qu'on le voit par le théorème VI. Si l'on rapporte la courbe à l'un de ces systèmes, toutes les puissances impaires de chacune des coordonnées doivent disparaître, et il ne peut rester qu'une équation de degré pair.

Pour démontrer que la réciproque n'est pas vraie, c'est-à-dire qu'une ligne d'ordre pair peut avoir un nombre impair de diamètres, il suffit d'un exemple. Prenons l'équation polaire $\rho = \cos 3\omega$, qui appartient à une courbe à trois axes. Faisant

$$\cos\omega = \frac{x}{\rho}, \quad \sin\omega = \frac{y}{\rho} \quad \text{et} \quad x^2 + y^2 = \rho^2,$$

il vient, en coordonnées rectangulaires,

$$(x^2 + y^2)^2 = x^3 - 3xy^2,$$

équation du quatrième degré.

Théorème VIII. *Une courbe algébrique à plusieurs diamètres est toujours la projection orthogonale d'une courbe ayant le même nombre d'axes.*

C'est une conséquence intuitive du théorème VI.

Corollaire. Appelons a, b, les longueurs des demi-axes principaux de l'ellipse $m_1\, m_2\, m_3 \ldots$, et soit

$$\mathrm{F}(x, y) = 0$$

l'équation de la courbe, rapportée au centre et aux axes de cette ellipse. Si l'on pose

$$x' = \frac{x}{a}, \quad y' = \frac{y}{b}, \qquad \text{ou} \qquad x = ax', \quad y = by',$$

la transformée $F(ax', by') = 0$ n'aura plus que des axes. Si l'on fait ensuite $x' = \rho \cos\omega$, $y' = \rho \sin\omega$, on aura l'équation polaire $F(a\rho\cos\omega, b\rho\sin\omega) = 0$ de la transformée. Cette équation jouit d'une propriété remarquable, définie par l'énoncé suivant.

Théorème IX. *L'équation polaire*

$$F(a\rho\cos\omega, \ b\rho\sin\omega) = 0$$

peut toujours être mise sous la forme

$$f(\rho, \cos\varpi\omega, \sin\varpi\omega) = 0,$$

f désignant une fonction rationnelle et entière.

Car cette équation est de telle nature, que, si l'on y change successivement ω en

$$\omega + \frac{2\pi}{\varpi}, \quad \omega + 2.\frac{2\pi}{\varpi}, \quad \omega + 3.\frac{2\pi}{\varpi}, \ldots, \quad \omega + (\varpi - 1)\frac{2\pi}{\varpi},$$

elle n'éprouve aucun changement de forme. Appelons F_1, F_2, F_3,..., $F_{\varpi-1}$, les résultats de ces substitutions : on pourra en conséquence prendre pour équation de la courbe l'équation

$$F + F_1 + F_2 + \ldots + F_{\varpi-1} = 0.$$

Or on sait que les fonctions ainsi composées, lorsque l'on remplace les puissances de $\sin\omega$ et de $\cos\omega$ par leurs expressions connues en fonction des sinus et cosinus des multiples de ω, ne peuvent contenir que ceux de ces multiples qui renferment le facteur ϖ, les autres disparaissant ; donc, etc.

Corollaire. Pour reconnaître si une courbe, donnée par son équation

$$F(x, y) = 0$$

rapportée à des axes quelconques, admet un groupe de ϖ diamètres se coupant en un même point, il faut changer d'axes en s'imposant la condition que l'équation nouvelle soit de la forme indiquée ci-dessus, ce qui revient à poser

$$x = \xi + \frac{\rho}{\sin\theta}[a \sin(\theta - \varphi)\cos\omega - b\cos(\theta - \varphi)\sin\omega],$$

$$y = \eta + \frac{\rho}{\sin\theta}(a \sin\varphi\cos\omega + b\cos\varphi\sin\omega];$$

ξ, η sont les coordonnées de la nouvelle origine, θ désigne l'angle des axes, et φ est l'angle formé par la ligne polaire avec l'axe des x. Faisons, pour abréger,

$$p = [a \sin(\theta - \varphi)\cos\omega - b\cos(\theta - \varphi)\sin\omega],$$
$$q = [a \sin\varphi\cos\omega + b\cos\varphi\sin\omega],$$

de sorte que l'on ait

$$x = \xi + \frac{p\rho}{\sin\theta}, \quad y = \eta + \frac{q\rho}{\sin\theta},$$

la substitution de ces valeurs dans $F(x, y) = 0$ donnera

$$0 = F(\xi, \eta) + \left. \begin{array}{l} p\dfrac{dF(\xi, \eta)}{d\xi} \\ + q\dfrac{dF(\xi, \eta)}{d\eta} \end{array} \right| \frac{\rho}{\sin\theta} + \left. \begin{array}{l} p^2\dfrac{d^2F(\xi, \eta)}{d\zeta^2} \\ + 2pq\dfrac{d^2F(\xi, \eta)}{d\xi\, d\eta} \\ + q^2\dfrac{d^2F(\xi, \eta)}{d\eta^2} \end{array} \right| \frac{\rho^2}{1.2.\sin\theta^2} + \ldots$$

ce développement procède suivant les puissances ascendantes de ρ, et son terme général peut s'écrire sous la forme symbolique

$$\left[p\frac{dF(\xi, \eta)}{d\xi} + q\frac{dF(\xi, \eta)}{d\eta}\right]^i \frac{\rho^i}{1.2.3\ldots.i\sin\theta^i}.$$

Il faut disposer de ξ, η, a, b, φ de manière que les coefficients des diverses puissances de ρ se réduisent à des fonctions rationnelles et entières de $\sin \varpi\omega$, $\cos \varpi\omega$, ce que l'on fera en égalant à zéro tous les termes de ces coefficients qui ne satisfont pas à cette condition. S'il existe un groupe de ϖ diamètres, toutes ces équations admettront une solution commune, et nous verrons bientôt qu'elles n'en pourront admettre qu'une seule.

On aura toujours, dans le cas de plusieurs diamètres, quel que soit ω,

$$p\frac{d\mathrm{F}(\xi, \eta)}{d\xi} + q\frac{d\mathrm{F}(\xi, \eta)}{d\eta} = 0,$$

ou, en remettant pour p et q leurs valeurs,

$$a\left[\frac{d\mathrm{F}(\xi, \eta)}{d\xi}\sin(\theta - \varphi) + \frac{d\mathrm{F}(\xi, \eta)}{d\eta}\sin\varphi\right]\cos\omega$$

$$-b\left[\frac{d\mathrm{F}(\xi, \eta)}{d\xi}\cos(\theta - \varphi) - \frac{d\mathrm{F}(\xi, \eta)}{d\eta}\cos\varphi\right]\sin\omega = 0.$$

Cette équation devant être satisfaite quelque valeur que l'on attribue à ω, il faut que les coefficients de $\sin\omega$ et de $\cos\omega$ soient nuls séparément, ce qui donne, en développant $\sin(\theta - \varphi)$ et $\cos(\theta - \varphi)$ et supprimant les facteurs a et b qui ne peuvent être nuls,

$$\frac{d\mathrm{F}(\xi, \eta)}{d\xi}\sin\theta = \left[\frac{d\mathrm{F}(\xi, \eta)}{d\xi}\cos\theta - \frac{d\mathrm{F}(\xi, \eta)}{d\eta}\right]\operatorname{tang}\varphi$$

$$\frac{d\mathrm{F}(\xi, \eta)}{d\xi}\sin\theta\operatorname{tang}\varphi = -\left[\frac{d\mathrm{F}(\xi, \eta)}{d\xi}\cos\theta - \frac{d\mathrm{F}(\xi, \eta)}{d\eta}\right];$$

multipliant membre à membre, il vient

$$\left[\frac{d\mathrm{F}(\xi, \eta)}{d\xi}\right]^2\sin^2\theta + \left[\frac{d\mathrm{F}(\xi, \eta)}{d\xi}\cos\theta - \frac{d\mathrm{F}(\xi, \eta)}{d\eta}\right]^2 = 0,$$

en supposant que l'on ait reconnu que l'angle φ n'est pas nul, ce qui exige des essais préalables faciles à imaginer. Cette dernière équation se partage en deux autres, savoir :

$$\frac{dF(\xi, \eta)}{d\xi} = 0, \quad \frac{dF(\xi, \eta)}{d\eta} = 0.$$

D'où l'on conclut que *les coordonnées* ξ, η *des points où peuvent se couper plusieurs diamètres sont celles qui satisfont à la fois aux équations que l'on obtient en égalant à zéro les dérivées par rapport à* x *et par rapport à* y *du premier membre de l'équation proposée*

$$F(x, y) = 0.$$

THÉORÈME X. *Tous les diamètres d'une courbe algébrique à équation irréductible se coupent nécessairement en un même point.*

Supposons, s'il est possible, un triangle formé par trois diamètres, et admettons, ce qui est évidemment permis, que ce triangle ne soit traversé par aucun autre diamètre. Au moyen de la direction des cordes conjuguées à chacun d'entre eux, on répétera d'un de ses côtés à l'autre, non-seulement la courbe, mais aussi les deux autres diamètres, en formant de nouveaux triangles de même surface que le premier, et les côtés de ces triangles seront eux-mêmes des diamètres. Par une construction semblable, poursuivie de proche en proche sur le périmètre du polygone ainsi obtenu, on formera un réseau de ces triangles, lesquels devront se juxtaposer, car si cette condition n'était pas remplie, et que l'un en couvrît un autre partiellement, ce dernier serait traversé par un diamètre, et en revenant, par une voie inverse, au triangle primitif, ce diamètre s'y trouverait répété, et traverserait par conséquent ce triangle, contrairement à l'hypothèse. Le réseau, considéré dans toute son étendue, couvrira donc entièrement le plan de la courbe, et le divisera en triangles de même surface. De plus, chaque côté ou diamètre prolongé sera rencontré par tous les autres, puisque deux diamètres ne peuvent être parallèles entre eux, et le nombre de ces rencontres, pour un même diamètre, sera infini, puisque n étant l'ordre de la courbe, il ne peut jamais arriver, d'après le théorème VII, que plus de n diamètres se coupent en un même point.

On a démontré dans le corollaire du théorème précédent, que $F(x, y) = 0$, étant l'équation de la courbe, les points d'intersection des diamètres sont donnés par les équations

$$\frac{dF(x, y)}{dx} = 0, \qquad \frac{dF(x, y)}{dy} = 0;$$

d'où il suit que les lieux géométriques qui expriment chacune d'elles passent par tous les points de rencontre des diamètres. Ces lieux sont ainsi coupés en un nombre infini de points par toute droite faisant partie du réseau, et cela ne peut être qu'autant que les premiers membres des équations ci-dessus ont pour facteurs les trinômes du premier degré, lesquels étant égalés à zéro donnent les diamètres. Ceux-ci étant en nombre infini, il en est de même de ces facteurs, de sorte que le degré des équations ci-dessus, et par conséquent celui de l'équation proposée, ne sauraient être finis; donc, etc.

Waring a énonce (*Proprietates algebraïcarum curvarum*, in-4, 1772; théorème VI, p. 13) plusieurs propositions sur les diamètres bissecteurs, et entre autres celle-ci : *Quand le degré* n *de l'équation d'une courbe algébrique est un nombre* premier, *cette courbe a* n *diamètres*, *ou n'en a qu'un, ou n'en a pas du tout.* « *Si modo* n *est primus numerus, tum habet unam vel* n *diametros vel nullam omnis algebraica curva.* » Proposition fausse. Par exemple, l'équation

$$(x^2 + y^2)(x^3 - 3xy^2) = 1,$$

qui est du *cinquième degré*, revient à $\rho^5 \cos 3\omega = 1$ et représente conséquemment une courbe à *trois* diamètres.