NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

VANNSON

Contact des cercles sur la sphère, par la géométrie

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 14 (1855), p. 55-71

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1855_1_14__55_1>

CONTACT DES CERCLES SUR LA SPHÈRE, PAR LA GEOMÉTRIE;

PAR M. VANNSON,
Professeur à Versailles.

1°. *Par un point* C *mener un arc de grand cercle tangent à un petit cercle donné.*

Soient P le pôle du petit cercle donné, r sa distance polaire $< \frac{\pi}{2}$, et Δ la distance de C à P; de P comme pôle, avec $2r$ pour distance polaire, décrivez un arc de cercle, et de C comme pôle un autre arc avec Δ pour distance polaire. Soit X un des points de rencontre de ces deux arcs; joignez X avec P : la rencontre de l'arc obtenu avec la circonférence donnée sera le point de contact. Deux solutions. Pour que le problème soit possible, il faut qu'on ait $\Delta > r$ et $\Delta < \pi - r$.

2°. *Étant donnés deux petits cercles, construire un grand cercle qui leur soit tangent.*

Soient P, P′ les pôles des cercles donnés; Δ la distance P, P′; R, r leurs distances polaires. Considérons d'abord le cercle tangent qui coupe l'arc PP′ sur son prolongement; on trouvera le pôle de ce grand cercle tangent, en construisant un triangle sphérique dont les côtés soient Δ, $\left(\frac{\pi}{2} - R\right)$, $\left(\frac{\pi}{2} - r\right)$. P, P′ seront deux sommets, le troisième sommet sera le pôle cherché. On trouve pour conditions

$$\Delta > R - r, \quad \text{et} \quad \Delta + R + r < \pi.$$

Considérons maintenant le cercle tangent qui coupe l'arc PP′ entre P et P′. Son pôle sera le troisième sommet d'un triangle ayant pour côtés Δ, $\left(\frac{\pi}{2} + r\right)$, $\left(\frac{\pi}{2} - R\right)$. On trouve pour conditions

$$\Delta > R + r, \quad \Delta + R - r < \pi.$$

3°. Théorème. *Si trois cercles tracés sur une sphère se coupent deux à deux, les trois arcs de grands cercles qui joignent les points d'intersection sur un même cercle concourent au même point.*

Ce théorème se déduit facilement de son analogue sur un plan, à l'aide des projections stéréographiques. Pour cela, traçons sur un plan P trois cercles qui se coupent deux à deux; soient AB, A′B′, A″B″ les trois cordes communes, et X leur point de concours. Du point X comme centre, décrivons une sphère, et prenons pour centre de projection le pôle P′ du plan P. Les trois cercles donnés auront pour projection sur la sphère trois autres cercles, et les cordes communes auront pour projections trois arcs de grands cercles qui passeront par les points communs aux trois cercles de la sphère pris deux à deux, et par les pôles du plan P : ce qui démontre le théorème énoncé.

4°. *Étant donné un petit cercle sur une sphère, si de son pôle on décrit un second cercle ayant pour distance polaire le complément de la distance polaire du premier, et que, par le pôle commun, on trace un arc quelconque de grand cercle coupant les deux petits en* A *et* B ; *ces deux points convenablement choisis seront à* 90 *degrés de distance l'un de l'autre, et chacun d'eux sera le pôle de la tangente menée par l'autre au cercle sur lequel il se trouve. On les nomme* points conjugués. *Les deux cercles ainsi obtenus sont appelés* polaires réciproques.

Cela posé, si deux cercles se coupent en deux points A, B, et qu'on trace pour chacun d'eux le cercle polaire réciproque, les grands cercles ayant A et B pour pôles seront tangents à ces deux derniers cercles en des points conjugués de A et de B, et l'intersection de ces deux tangentes communes sera le pôle de l'arc passant par A et B.

5°. Si trois cercles se coupent deux à deux, et qu'on trace leurs cercles polaires reciproques, puis qu'on mène à ces derniers cercles, pris deux à deux, deux tangentes communes, les trois points de rencontre de chaque couple de tangentes seront les pôles des trois arcs menés par les points d'intersection. Or ces trois arcs concourent en un même point O ; donc les trois points de rencontre des tangentes seront sur un grand cercle ayant O pour pôle.

6°. *Si par deux points* A, B *on fait passer des cercles* *et que par un point* C, *pris sur* AB *prolongé, on leur mène des arcs de grands cercles tangents, le lieu du point de contact sera une circonférence ayant pour pôle le point* C.

Ce théorème se démontre facilement par les projections stéréographiques. Si le point C est pris entre A et B, l'arc tangent se remplace par l'arc minimum, et le point de contact par le point où cet arc minimum coupe la circonférence.

7°. Problème. *Par deux points* A, B *mener un cercle tangent à un petit cercle.*

Le théorème 3 conduit à la construction suivante: Par A et B menez un cercle quelconque, qui coupe le cercle donné aux points C, D; prolongez les arcs CD, AB jusqu'à ce qu'ils se rencontrent en un point O; menez de ce point O deux tangentes au cercle donné. Soient M et N leurs points de contact: la question sera ramenée à faire passer un cercle par les trois points A, B, M ou A, B, N. L'explication se ferait comme sur un plan.

Cette construction ne serait pas applicable si le cercle donné était un grand cercle. Mais en se reportant au théorème 6, on est conduit à la construction suivante: Par A et B menez un cercle arbitraire et par le point O une tangente à ce cercle. Soit D le point de contact; prenez, à partir du point O sur le cercle donné, deux longueurs OM, ON égales à OD : les points MN seront les points de contact demandés.

8°. On peut résoudre de la même manière le problème suivant:

Étant donnés un cercle et deux points, faire passer par ces deux points un second cercle qui coupe le premier en deux points éloignés l'un de l'autre d'une longueur donnée.

9°. La considération des cercles polaires réciproques permet de ramener au problème 8 celui dont voici l'énoncé :

Étant donnés deux grands cercles et un petit A, *mener aux deux premiers un cercle tangent* B *tel, que si l'on mène aux deux cercles* A *et* B *deux tangentes communes, l'angle de ces tangentes soit égal à un angle donné.*

10°. Problème. *Étant donnés deux points et un grand cercle, trouver sur ce cercle un point tel, que la somme des distances de ce point aux deux points donnés soit égale à un arc donné.*

Ce problème se ramène facilement au problème 8, comme sur un plan.

11°. Par la considération des cercles polaires, on ramène le problème suivant au problème 10 :

Étant donnés un point et deux arcs de grands cercles, mener par le point un troisième cercle coupant les deux autres sous deux angles dont la somme est donnée.

12°. Les problèmes 10 et 11 peuvent encore s'énoncer de la manière suivante :

1. *Étant donnés les foyers d'une ellipse sphérique et l'axe des foyers, trouver son intersection avec un grand cercle donné de position.*

2. *Construire un triangle sphérique, connaissant la surface, un angle et un point par lequel doit passer le côté opposé.*

13°. Théorème. *Étant donnés deux petits cercles sur une sphère, on peut évidemment mener une infinité de grands cercles qui les coupent tous deux sous des angles égaux; tous ces cercles passent par un point fixe sur le prolongement de la ligne des pôles, ou par un second point sur la même ligne entre les deux pôles. Le premier point se nomme centre de similitude directe; le second, centre de similitude inverse.*

Soient A, B, A′, B′ les quatre points de rencontre de l'arc des pôles avec les circonférences données, A, B étant les deux points les plus rapprochés. (Nous supposerons, pour fixer les idées, deux cercles extérieurs l'un à l'autre.) Supposons mené un grand cercle coupant les cercles donnés sous des angles égaux, et soient C, D, C′, D′ les quatre points de rencontre, C, D désignant les plus voisins. Les quatre points A, B, C, D sont sur un même cercle : on le démontre facilement en faisant voir que dans le quadrilatère ABCD, la somme de deux angles opposés égale celle des deux autres. Soient E, H, E′, H′ les quatre points analogues aux précédents pour un autre grand cercle, les quatre points A, B, E, H sont de même sur un cercle, ainsi que les quatre points C, D, E, H (même démonstration). On a donc deux cercles qui se coupent deux à deux; donc (nº 3) nos deux grands cercles et l'axe des pôles se coupent au même point.

C. Q. F. D.

Remarque. Il est aisé de voir qu'un grand cercle coupant les deux donnés sous des angles égaux peuvent couper l'axe des pôles entre les deux pôles ou sur le prolongement de cet arc; de là la distinction des deux centres de similitude. Pour trouver géométriquement le premier centre de similitude, considérons d'abord deux cercles extérieurs l'un par rapport à l'autre; soient PP′ leurs pôles, RR′ leurs distances polaires, Δ la distance de leurs pôles. De P comme pôle avec $R+a$ comme distance polaire décrivons un cercle, et de P′ comme pôle un second cercle avec $R'+a$ pour distance polaire; ces deux cercles se couperont, pourvu qu'on ait $2a < \Delta - (R+R')$ et $2a > 2\pi - (\Delta + R + R')$, conditions auxquelles on peut toujours satisfaire. Joignons le point de rencontre à P et à P′ par deux arcs de grands cercles, ils couperont nos deux cercles en deux points C et D; joignant CD, la rencontre de cet arc avec l'axe des pôles sera, comme il est aisé de le voir, le centre de similitude directe. L'autre centre de similitude se trouve d'une manière analogue, quelle que soit la position des deux cercles.

14°. Problème. *Étant donnés un point* A *et deux grands cercles, construire un cercle passant par le point* A *et tangent aux deux cercles donnés.*

Première solution. Si l'on divise l'angle des cercles en deux parties égales et qu'on prenne par rapport à l'arc bissecteur le symétrique de A, on ramènera le problème à celui du n° 7.

Deuxième solution. Soit C l'intersection des deux grands cercles, joignons A avec C, et menons un cercle tangent quelconque aux deux côtés de l'angle C dans lequel est A : le cercle tangent coupera l'arc AC en deux points F, G. Joignons chacun d'eux au pôle (P) du cercle tangent, nous obtiendrons le triangle isocèle PFG. Maintenant menons par le point A deux arcs de grands cercles formant avec AC deux angles égaux à l'angle à la base de ce triangle isocèle. Ces grands cercles détermineront sur l'arc bissecteur deux points qui seront les pôles de deux cercles satisfaisant à la question. Cette construction est une conséquence immédiate du théorème précédent.

15°. *Mener par un point connu* (A) *un cercle tangent à deux petits cercles donnés.*

Supposons les cercles extérieurs ; soient P, P′ leurs pôles, C, D les points les plus voisins l'un de l'autre, où l'axe des pôles coupe les circonférences données ; supposons le problème résolu dans le cas du contact extérieur, et soient X, Y les deux points de contact. L'arc XY ira évidemment passer par le centre de similitude directe. Soit Z ce centre ; je le joins à A par un arc qui coupe la circonférence demandée en un point O. Les quatre points C, D, X, Y sont sur un même cercle, ainsi que les quatre points X, Y, A, O. D'où il est facile de conclure que les quatre points C, D, A, O sont aussi sur un même cercle. On connaît trois points de ce cercle, on peut donc le tracer, et, par suite, déterminer le point O; nous rentrons ainsi dans le cas du n° 7. Ce qui donne deux solutions. Les autres cercles tangents se trouvent de la même manière, en employant le centre de similitude inverse.

La même construction s'applique encore, si l'on remplace un des petits cercles par un grand.

Le problème de mener un cercle tangent à trois autres se ramène au précédent, comme dans la géométrie plane.

On peut aussi le résoudre directement, comme sur un plan, en se fondant sur quelques propriétés des axes radicaux et des centres de similitude que nous allons exposer.

1°. Les sinus des distances du centre de similitude de deux cercles aux pôles de chacun d'eux sont comme les sinus des distances polaires.

2°. Si par le centre de similitude on fait passer un grand cercle, les sinus des distances de chaque pôle à ce grand cercle sont aussi comme les sinus des distances polaires.

3°. Si le grand cercle coupe les deux cercles donnés, les tangentes des demi-cordes interceptées sont comme les tangentes des distances polaires.

4°. Les tangentes des distances de chaque pôle au grand cercle sont comme les sinus des demi-cordes, et aussi comme les sinus des arcs compris depuis le centre de similitude jusqu'au milieu de chaque corde. Si dans la dernière proportion entre ces quatre sinus on fait la somme des deux premiers termes et leur différence, on arrive au théorème suivant :

Les tangentes des moitiés des quatre arcs compris entre le centre de similitude et les quatre points d'intersection sont proportionnelles.

5°. On sait que le produit des tangentes des demi-segments relatifs à un des cercles est égal au carré de la tangente du demi-arc tangent mené par le centre de similitude. Si l'on combine cette relation avec le théorème 4, on arrive à cette conséquence :

6°. Si par le centre de similitude de deux cercles on mène un cercle sécant, les tangentes des demi-segments homologues sur ce grand cercle sont comme les tangentes des demi-arcs tangents menés par le centre de similitude. Si le centre de similitude est dans l'intérieur des cercles, le théorème 6 a toujours lieu, en remplaçant l'arc tangent par la moitié de l'arc minimum passant par ce centre.

7°. Si après avoir mené un grand cercle par le centre de similitude, on détermine son pôle relativement à chaque cercle donné, ces deux pôles et le centre de similitude sont sur un grand cercle.

8°. *Étant donnés trois cercles sur une sphère, si l'on détermine leurs centres de similitude directe et inverse en les prenant deux à deux, les trois centres de similitude directe seront sur un même grand cercle, qu'on nomme* axe de similitude directe; *deux centres de similitude inverse et un des centres de similitude directe sont aussi sur un même grand cercle, qu'on nomme* axe de similitude inverse.

Ce théorème se démontre comme sur un plan par la théorie des transversales.

9°. Si par le pôle P d'un petit cercle on fait passer un arc de grand cercle, et qu'on prenne sur ce cercle à partir de P deux arcs PA, PB tels, qu'on ait

$$\text{tang PA} \times \text{tang PB} = \text{tang}^2 r,$$

r, étant la distance polaire, ces deux points sont appelés *points conjugués.* Si par A ou B on mène un grand cercle perpendiculaire sur PA, ce cercle s'appelle *cercle polaire* du point B ou du point A, et, réciproquement, B se nomme le *pôle* du grand cercle mené par le point A. Les propriétés des pôles et polaires sont les mêmes que sur un plan, et se démontrent sans difficulté.

10°. *Axe radical de deux cercles.* Si l'on coupe deux cercles par un cercle arbitraire qui rencontre le premier en A et B, le deuxième en A′ et B′, qu'on fasse passer par A et B un arc de grand cercle, et un autre par A′, B′, ces deux cercles se couperont en un point O. Le lieu du point O est un grand cercle perpendiculaire à l'axe des pôles des deux cercles donnés; on le nomme *axe radical* de ces deux cercles.

Démonstration. Soit M la projection de O sur l'axe des pôles P, P′; soient r, r' les distances polaires; nous avons, par un théorème connu,

$$\operatorname{tang}\frac{OA}{2}\times\operatorname{tang}\frac{OB}{2}=\operatorname{tang}\frac{OA'}{2}\operatorname{tang}\frac{OB'}{2}.$$

Mais le premier produit égale $\operatorname{tang}\frac{OP\times r}{2}\times\operatorname{tang}\frac{OP\times r}{2}$ et le second égale $\operatorname{tang}\frac{OP'+r'}{2}\operatorname{tang}\frac{OP'+r'}{2}$: donc

$$\cot\frac{OP+r}{2}\times\cot\frac{OP-r}{2}=\cot\frac{OP'+r'}{2}\cot\frac{OP'-r'}{2};$$

de là, par une transformation très-simple,

$$\frac{\cos OP+\cos r}{\cos OP-\cos r}=\frac{\cos OP'+\cos r'}{\cos OP'-\cos r'},$$

et enfin,

$$\frac{\cos OP}{\cos OP'}=\frac{\cos r}{\cos r'}.$$

Mais $\cos OP=\cos OM\cos PM$ et $\cos OP'=\cos OM\cos P'M$; donc on a

$$\frac{\cos PM}{\cos P'M}=\frac{\cos r}{\cos r'},$$

d'où

$$\frac{\tang \frac{PM - P'M}{2}}{\tang \frac{P+P'}{2}} = \frac{\tang \frac{r+r'}{2}}{\tang \frac{P-P'}{2}}.$$

Ce qui démontre que la position du point M est la même, quel que soit le cercle sécant. Donc le lieu demandé est un grand cercle perpendiculaire à l'axe des pôles.

Si l'on calcule tang PM, on trouve

$$\frac{\tang^2 \frac{PP'}{2} + \tang\left(\frac{r+r'}{2}\right)\tang\left(\frac{r-r'}{2}\right)}{\left[1 - \tang\left(\frac{r+r'}{2}\right)\tang\left(\frac{r-r'}{2}\right)\right]\tang \frac{PP'}{2}},$$

résultat analogue à celui de la géométrie plane.

Les trois axes radicaux de trois cercles combinés deux à deux se coupent en un point, qu'on nomme *centre radical* des trois cercles.

Remarque. Quand deux cercles sont tangents, le point de contact peut se trouver entre les deux pôles, ou sur le prolongement de l'arc qui les joint. Dans le premier cas, nous dirons qu'il y a contact de *première* espèce, et de *seconde* dans l'autre cas. Cette convention nous servira pour énoncer en moins de mots les théorèmes suivants.

11°. *Étant donnés deux cercles* P, P', *si l'on trace deux autres cercles* Q, Q' *ayant avec chacun des premiers un contact de même espèce, le centre de similitude directe de* PP' *sera sur l'axe radical des cercles* Q *et* Q', *et réciproquement.*

Si le cercle Q a un contact de première espèce avec P et P', et Q' un contact de deuxième espèce avec chacun des mêmes cercles, il faudra dans la deuxième partie de l'énoncé prendre le centre de similitude inverse. Si le cercle Q a avec P un contact de première espèce, et Q' avec P' un contact de la deuxième, il faudra dans les deux parties de l'énoncé considérer le centre de similitude inverse. Ces théorèmes résultent immédiatement de la définition de l'axe radical.

12°. *Étant donnés trois cercles* P, P', P'', *si l'on trace deux cercles* Q, Q', *ayant avec chacun des premiers un contact de première espèce pour* Q, *de deuxième pour* Q', *le centre de similitude inverse de* Q *et* Q' *sera sur chacun des trois axes radicaux des cercles donnés pris deux à deux; il sera donc le centre radical de ces trois cercles; de plus, comme chaque centre de similitude directe des cercles* P, P', P'' *appartiendra à l'axe radical des cercles* Q, Q', *il s'ensuit que l'axe de similitude directe des cercles donnés sera l'axe radical des mêmes cercles* Q, Q'.

Si le cercle Q avait avec P, P' un contact de première espèce, et de seconde avec P''; si de plus Q' avait un contact de seconde espèce avec P, P', et de première avec P'', il faudra prendre, au lieu de l'axe de similitude directe, un axe de similitude inverse.

Étant donnés trois cercles P, P', P'' *sur une sphère, leur mener un cercle tangent.*

Supposons le problème résolu, et soient Q, Q' deux cercles ayant avec les trois cercles donnés un contact de première espèce pour Q, de seconde pour Q'. Soient X'', X', X les trois centres de similitude directe des cercles donnés et O leur centre radical. Ce point sera le centre de similitude inverse des cercles cherchés. Nommons A, A' les points de contact sur le cercle P, l'arc AA' passera par le point O. Pour avoir un second point de AA', menons par les points A, A' deux arcs tangents au cercle P : soit Z leur point de rencontre; comme de ce point Z partent deux tangentes égales menées aux cercles Q, Q', ce point Z est sur l'axe radical des cercles Q, Q', c'est-à-dire sur l'arc $XX'X''$. Donc l'arc AA' doit passer par le pôle de l'arc XX'' relativement au cercle P. Il suffira donc de joindre ce pôle au point O par un arc de grand cercle, et l'intersection de cet arc avec le cercle P déterminera les points A, A'; les autres points de contact se trouvent de la même manière.

Si l'on fait la même construction en remplaçant l'axe de similitude directe par chacun des trois axes de similitude inverse, on déterminera les cercles qui ont avec P et P' un contact de première espèce, et de la seconde avec P'', ou réciproquement. La construction relative à chaque axe radical donnant deux cercles, on aura en général huit solutions.

Beaucoup de problèmes peuvent se ramener à une question de contact. Nous nous bornerons à indiquer quelques exemples.

1°. Étant donnés deux points sur une circonférence, trouver sur cette circonférence un troisième point tel, que le joignant aux deux points donnés par deux arcs de grand cercle, ces arcs fassent entre eux un angle donné.

Par la considération du triangle polaire, on ramène le problème à construire un triangle connaissant le cercle inscrit, un angle et le côté opposé, et cette question revient elle-même à mener un grand cercle tangent à deux cercles donnés.

2°. Construire un triangle sphérique, connaissant le cercle circonscrit, un côté et la surface.

Ce problème se résout comme le précédent.

3°. Construire un triangle sphérique, connaissant la base, la hauteur et la surface.

Il peut aussi se ramener par le triangle polaire à mener un cercle tangent à deux cercles donnés.

4°. Étant donnés les grands axes et les foyers de deux ellipses sphériques qui ont un foyer commun, trouver leurs points d'intersection.

Ce problème se ramène à tracer un cercle tangent à deux cercles et passant par un point donné.

Nous terminerons cette Note par quelques énoncés de théorèmes et problèmes de Géométrie sphérique.

1°. Étant donnés deux points A et B sur une circonférence, si l'on prend un point quelconque C sur l'arc AMB, qu'on mène les arcs CA, CB et qu'on les prolonge jusqu'à leur rencontre en C′, le triangle AC′B aura une surface constante, et, par suite, le lieu du point C′ sera une circonférence de cercle (*).

2°. Si par le point de contact de deux cercles tangents on fait passer un arc de grand cercle qui coupe les cercles donnés en A et B, et un second qui les coupe en A′ et B′, si l'on joint A à A′ et B à B′, qu'on prolonge les arcs AA′, BB′ jusqu'à leur rencontre aux points C et D, les deux triangles AA′C, BB′D seront équivalents.

3°. Étant donné un arc de grand cercle AB, si à partir de son point milieu M on prend sur cet arc un quadrant MN, qu'on mène par N un arc perpendiculaire NP sur AB, la somme des distances d'un point quelconque O de NP aux points A et B est constante et égale à π, et les angles formés par OA et OB avec l'arc AB seront égaux. Si l'on diminue de plus en plus l'arc AB jusqu'à la limite zéro, on arrive au théorème suivant : Le lieu des intersections successives des cercles qui font avec une circonférence de grand cercle donnée des angles égaux, est une circonférence de petit cercle ayant pour distance polaire le complément de la mesure de l'angle donné.

4°. Étant données deux circonférences qui se coupent aux points A et B, si par le point A on suppose mené un arc sécant MAN de longueur donnée, trouver la distance

(*) Si l'arc AMB est une demi-circonférence, la surface constante sera équivalente à un grand cercle de la sphère.

polaire d'un cercle qui passerait par les trois points MNB.

5°. Étant donné un triangle sphérique ABC, si l'on prolonge les trois côtés jusqu'à ce qu'ils se coupent aux points A′, B′, C′, on aura formé trois triangles ABC′, etc.; si à chacun d'eux on circonscrit un cercle, les tangentes des distances polaires de ces trois cercles sont comme les tangentes des demi-côtés du triangle donné.

6°. Dans un triangle sphérique rectangle, la tangente carrée de la moitié de l'hypoténuse est plus petite que la somme des carrés des tangentes des demi-côtés, et la différence est égale au produit des carrés des tangentes des trois demi-côtés.

7°. Transformer par une construction géométrique un parallélogramme sphérique en un carré sphérique équivalent.

8°. Étant donnés deux polygones réguliers sphériques d'un même nombre (n) de côtés, on propose de construire un polygone régulier du même nombre de côtés, équivalent à leur somme.

Ce problème se résout aisément par la géométrie. Si on le traite par le calcul on trouve, en désignant par ρ, ρ', ρ'' les distances polaires des trois cercles circonscrits aux polygones,

$$\tan^2\frac{\rho''}{2} = \frac{\sin^2\frac{\rho}{2} + \sin^2\frac{\rho'}{2} - 4\sin^2\frac{\rho}{2}\sin^2\frac{\rho'}{2}\sin^2\frac{\pi}{n}}{\cos\frac{\rho+\rho'}{2}\cos\left(\frac{\rho-\rho'}{2}\right)}.$$

Si $n = 4$, on a

$$\tan^2\frac{\rho''}{2} = \frac{\sin^2\frac{\rho}{2}\cos\frac{\rho'}{2} + \cos^2\frac{\rho}{2}\sin^2\frac{\rho'}{2}}{\cos\frac{\rho+\rho'}{2}\cos\left(\frac{\rho-\rho'}{2}\right)}.$$

Si $n = \infty$, on trouve

$$\sin^2 \frac{\rho''}{2} = \sin^2 \frac{\rho}{2} + \sin^2 \frac{\rho'}{2},$$

résultat facile à vérifier.

9°. Si l'on projette un point C d'une circonférence sur un arc AB passant au pôle, les carrés des sinus des demi-arcs AC et CB sont comme les sinus de leurs projections sur l'arc diamétral.

10°. Étant donnés un triangle sphérique ABC et un point O, si l'on joint ce point à un sommet A, qu'on mène sur l'arc OA et par le sommet A un arc perpendiculaire prolongé jusqu'à la rencontre de BC en un point X, si l'on opère de même pour les deux autres sommets, les trois points ainsi obtenus sont sur une circonférence de grand cercle.

11°. Etant donnés une courbe sur la sphère et un point O, si on le joint à un point A quelconque de la courbe, puis qu'on divise l'arc OA au point A′ de manière à avoir $\frac{\sin OA'}{\sin AA'} = \alpha$, la courbe, lieu du point A′, aura la propriété suivante: si par les points homologues A et A′ on mène une tangente à chaque courbe, le point de rencontre (X) des arcs tangents sera toujours à 90 degrés de distance du point A, ce qui donne une construction simple pour mener une tangente à la seconde courbe, si l'on sait mener une tangente à la première; si la première courbe est une circonférence, le lieu du point X sera une autre circonférence ayant même pôle que la première. Si $\alpha = 1$, le lieu du point A′ sera une ellipse sphérique dont on peut trouver géométriquement le centre et les axes.

12°. Si l'on projette deux points A, A′ sur une circonférence de grand cercle (mn), par les arcs AB, A′B′, si l'on prend sur ces arcs ou leurs prolongements deux points

C, C′ tels, qu'on ait la proportion

$$\frac{\text{tang}\,(\text{AB})}{\text{tang}\,(\text{CB})} = \frac{\text{tang}\,(\text{A}'\,\text{B}')}{\text{tang}\,(\text{C}'\text{B}')},$$

si enfin on joint A à A′, C à C′, les arcs ainsi déterminés et l'arc *mn* auront un point commun, et réciproquement.

Corollaire. Si l'on projette un point quelconque A d'une courbe donnée sur une circonférence de grand cercle *mn*, si l'on détermine sur l'arc AB projetant un point C par la relation $\frac{\text{tang}\,\text{AB}}{\text{tang}\,\text{CB}} = \alpha$, le lieu du point C jouira de la propriété suivante : les tangentes aux deux courbes menées par les points conjugués A et C iront couper l'arc *mn* au même point; ce qui donne un moyen simple de mener une tangente à la seconde courbe par un point pris sur la courbe ou hors de la courbe, si l'on sait résoudre le problème de contact pour la première. Si, par exemple, on compare l'ordonnée y d'une ellipse sphérique à l'ordonnée Y de son cercle principal, on démontre facilement qu'on a la relation $\frac{\text{tang}\,y}{\text{tang}\,\text{Y}} = \frac{\text{tang}\,b}{\text{tang}\,a}$ (a et b étant les demi-axes de l'ellipse). Cette relation combinée avec le théorème (12) donne une construction simple de l'ellipse par points et un moyen de mener une tangente à l'ellipse par un point pris sur la courbe ou hors de la courbe. On peut appeler ellipses *semblables* celles pour lesquelles on a la relation $\frac{\text{tang}\,a}{\text{tang}\,b} = \frac{\text{tang}\,a'}{\text{tang}\,b'}$. Si les axes homologues de deux ellipses semblables sont sur une même circonférence, on pourra leur mener une tangente commune. Il suffira pour cela de tracer une circonférence qui soit tangente commune aux deux cercles principaux. Soient A, A′ les points de contact : si l'on détermine sur chaque ellipse les points correspondants A et A′, ces points correspondants détermineront la circonférence tangente aux deux ellipses.