

SCHLOMILCH

Note sur la quadrature élémentaire du cercle

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 14 (1855), p. 462-464

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1855_1_14__462_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1855, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

NOTE SUR LA QUADRATURE ÉLÉMENTAIRE DU CERCLE;

PAR M. SCHLOMILCH,
Professeur à l'université de Dresde.

En désignant par S_n l'aire d'un polygone régulier de n côtés inscrit au cercle et par T_n l'aire du polygone circonscrit correspondant, on a, comme on sait, les deux relations

$$(1) \quad S_{2n} = \sqrt{S_n T_n}, \quad T_{2n} = \frac{2S_n T_n}{S_n + T_n}.$$

On se sert de ces formules pour le calcul numérique du rapport entre le rayon et l'aire du cercle, mais ce calcul est peu commode parce qu'il faut aller jusqu'au nombre $n = 32768$ pour trouver sept décimales de π . C'est pourquoi nous allons développer une formule approximative qui jouit d'une grande précision et qui donne déjà pour $n = 256$ le même résultat que les formules ci-dessus pour $n = 32768$.

Pour rendre plus traitables les relations (1), nous prenons

$$\frac{1}{S_n} = \dot{S}_n, \quad \frac{1}{T_n} = \dot{T}_n,$$

ce qui donne

$$(2) \quad \dot{S}_{2n} = \sqrt{\dot{S}_n \dot{T}_n}, \quad \dot{T}_{2n} = \frac{1}{2} (\dot{S}_{2n} + \dot{T}_{2n}).$$

D'autre part, il est connu que l'on peut remplacer la moyenne géométrique entre deux nombres α et $\alpha + \delta$ par la moyenne arithmétique, pourvu que l'erreur commise qui ne surpasse jamais la quantité $\frac{\delta^2}{8\alpha}$ n'altère pas le de-

gré de précision que l'on désire (*). En faisant usage de ce principe, nous posons un terme quelconque

$$\check{T}_k = \alpha \quad \text{et} \quad \check{S}_k = \alpha + \delta,$$

et nous aurons

$$\check{S}_{2k} = \alpha + \frac{1}{2} \delta,$$

$$\check{T}_{2k} = \alpha + \frac{1}{4} \delta,$$

$$\check{S}_{4k} = \alpha + \frac{1}{4} \delta + \frac{1}{8} \delta^2,$$

$$\check{T}_{4k} = \alpha + \frac{1}{4} \delta + \frac{1}{16} \delta^2,$$

$$\check{S}_{6k} = \alpha + \frac{1}{4} \delta + \frac{1}{16} \delta^2 + \frac{1}{32} \delta^3,$$

$$\check{T}_{6k} = \alpha + \frac{1}{4} \delta + \frac{1}{16} \delta^2 + \frac{1}{64} \delta^3.$$

.....

(*) L'équation identique

$$\sqrt{\alpha(\alpha + \delta)} = \sqrt{\left(\alpha + \frac{1}{2} \delta\right)^2 - \frac{1}{4} \delta^2}$$

fait voir que l'on a toujours

$$\sqrt{\alpha(\alpha + \delta)} < \alpha + \frac{1}{2} \delta.$$

Soit de plus ϵ l'erreur que l'on commet en remplaçant $\sqrt{\alpha(\alpha + \delta)}$ par $\alpha + \frac{1}{2} \delta$, on a

$$\sqrt{\alpha(\alpha + \delta)} = \alpha + \frac{1}{2} \delta - \epsilon$$

et

$$\sqrt{\alpha(\alpha + \delta)} + \epsilon = \alpha + \frac{1}{2} \delta;$$

le carré de cette équation est

$$2\sqrt{\alpha(\alpha + \delta)} + \epsilon^2 = \frac{1}{4} \delta^2,$$

ce qui donne

$$\epsilon = \frac{\frac{1}{4} \delta^2}{2\sqrt{\alpha(\alpha + \delta)} + \epsilon} < \frac{\delta^2}{8\alpha}$$

La limite vers laquelle convergent ces expressions est évidemment

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} &= \alpha + \frac{1}{4} \delta + \frac{1}{16} \delta + \frac{1}{64} \delta + \frac{1}{256} \delta + \dots \\ &= \alpha + \frac{1}{3} \delta = \dot{T}_k + \frac{1}{3} (\dot{S}_k - \dot{T}_k) = \frac{1}{3} (\dot{S}_k + 2\dot{T}_k). \end{aligned}$$

En substituant les valeurs de \dot{S}_k et de \dot{T}_k , on parvient à la formule très-simple

$$(3) \quad \pi = \frac{3S_k T_k}{2S_k + T_k}.$$

L'erreur commise est moindre que la quantité

$$\frac{(\dot{S}_k - \dot{T}_k)^2}{8\dot{T}_k} = \frac{(T_k - S_k)^2}{8S_k^2 T_k}.$$

Pour rendre plus commode cette expression, nous remarquons que l'on a toujours $S_k > S_3$, pourvu que $k > 3$; il suit de là

$$S_k > \frac{3}{4} \sqrt{3} \quad \text{et} \quad S_k^2 > \frac{27}{16};$$

d'autre part, il est clair que T_k surpasse toujours le nombre 3, on a donc

$$8S_k^2 T_k > 8 \cdot \frac{27}{16} \cdot 3 > 40;$$

l'erreur commise est donc moindre que la quantité $\frac{1}{40} (\Gamma_k - S_k)^2$.

Ce petit développement n'enrichit point la science, mais nous croyons qu'il peut être utile pour l'enseignement de la géométrie.
