NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

ERNEST DE JONQUIÈRES

Démonstration des théorèmes de Nicollic (voir pages 263 et 425)

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 14 (1855), p. 440-443

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1855_1_14__440_1>

DÉMONSTRATION DES THÉORÈMES DE NICOLLIC

(voir pages 263 et 425) ;

PAR M. ERNEST DE JONQUIÈRES,
Lieutenant de vaisseau.

(Je conserve les notations des *Nouvelles Annales.*) La conique et le cercle F, décrit du foyer donné comme centre, sont deux figures homologiques (PONCELET, *Propriétés projectives*, n° 453, p. 260 et 261, et *Géométrie supérieure*, n° 529). Le *centre d'homologie* est le point F lui-même, et l'*axe d'homologie* est la sécante commune (réelle ou idéale) des deux courbes. Cette sécante, ou *axe de symptose,* est évidemment perpendiculaire à l'axe focal.

D'après cela, soient x, x', x'' les points de rencontre des cordes données $A'''A'$, $A'A''$, $A''A'''$ avec leurs homologues $a'''a'$, $a'a''$, a'', a''' respectivement. Ces trois points sont sur l'axe d'homologie (*Géométrie supérieure*, n° 518) et le déterminent. Pour obtenir l'axe focal, il suffit donc d'abaisser sur xx'' la perpendiculaire FP.

Cette construction fort simple n'est pas celle qu'emploie Nicollic. Il divise les trois cordes du cercle, aux points B'', B''', B', en segments inversement proportionnels aux rayons vecteurs de la conique qui aboutissent aux extrémités de ces cordes. On voit d'abord aisément que ces points sont, respectivement, les homologues des points milieux des cordes de la conique; ainsi, le rayon FB'', par exemple, coupe la corde A'''A' en son milieu β''. En effet, soit x le point de concours des cordes homologues A'''A', $a'''a'$. Les triangles $x\mathrm{A}'a'$, $x\mathrm{A}'''a'''$, coupés par la transversale FB'' β'', donnent les deux relations

$$\frac{\mathrm{FA}'}{\mathrm{F}a'}\cdot\frac{\mathrm{B}''a'}{\mathrm{B}''x}\cdot\frac{\beta''x}{\beta''\mathrm{A}'}=1$$

et

$$\frac{\mathrm{FA}'''}{\mathrm{F}a'''}\cdot\frac{\mathrm{B}''a'''}{\mathrm{B}''x}\cdot\frac{\beta''x}{\beta''\mathrm{A}'''}=1.$$

(*Géométrie supérieure*, n° 352.)

Egalant les premiers membres et remarquant qu'on a, par construction,

$$\mathrm{F}a'=\mathrm{F}a'''$$

et

$$\frac{\mathrm{FA}'}{\mathrm{FA}'''}\cdot\frac{\mathrm{B}''a'}{\mathrm{B}''a'''}=1,$$

il reste

$$\beta''\mathrm{A}'=\beta''\mathrm{A}''',$$

ce qui démontre la proposition énoncée.

Actuellement, supposons qu'on mène une série de cordes parallèles à A'A'''. Le lieu de leurs points milieux

β'' sera le diamètre de la conique conjugué à leur direction. Donc le lieu des points homologues B$''$ sera aussi une ligne droite, passant par le point P, qui est, dans le cercle, le point homologue du centre O de la conique. Or je dis que cette droite B$''$P est, de plus, perpendiculaire sur A$'$A$'''$. En effet, soient T, T$'$ les extrémités du diamètre conjugué à A$'$A$'''$; t et t' les points homologues sur le cercle, et soit enfin Fτ une parallèle à A$'$A$'''$ menée par le foyer F. Fτ divise l'angle TFT$'$ en deux parties égales, en vertu d'une propriété bien connue des coniques (Poncelet, *Propriétés projectives*, n° 461 ou 469); donc Fτ est perpendiculaire sur la corde tt' du cercle. Mais cette corde n'est autre chose que la droite B$''$P, puisque les points t, t' sont deux positions particulières du point B$''$. Donc enfin B$''$P est perpendiculaire sur A$'$A$'''$. C. Q. F. D.

Le point P, homologue du centre O de la conique, est un point fixe, indépendant de la corde A$'$A$'''$. Les droites, lieux géométriques des points B$'''$ et B$'$, passent aussi par ce point, et sont respectivement perpendiculaires sur les cordes A$'$A$''$, A$''$A$'''$; tout cela d'après les raisonnements identiques à ceux qui précèdent.

Donc les trois perpendiculaires abaissées des points B$''$, B$'$, B$'''$ sur les cordes respectives de la conique se coupent en un même point de l'axe focal, ainsi que l'auteur l'a avancé.

Le point P étant connu, menons Pa' jusqu'à la rencontre de l'axe d'homologie en π; la droite homologue πA$'$ déterminera le point O sur l'axe focal; et si cet axe coupe le cercle aux points d, d', il sera bien aisé de trouver leurs homologues D, D$'$ qui sont les extrémités de l'axe focal. La conique est donc de la sorte complétement déterminée. Mais il faut arriver aux proportions données par Nicollic.

Soit OE l'axe transverse de la conique ; il est parallèle à l'axe d'homologie $xx'x''$, son homologue Pe lui est donc aussi parallèle ; les triangles rectangles FOE, FPe sont semblables et l'on a

$$\frac{\mathrm{PF}}{e\mathrm{F}} = \frac{\mathrm{OF}}{\mathrm{EF}},$$

ou

$$\frac{\mathrm{PF}}{a'\,\mathrm{F}} = \frac{\text{excentricité}}{\text{demi-axe focal}},$$

à cause de

$$e\mathrm{F} = a'\mathrm{F}.$$

Les lignes A′O et a'P sont deux droites homologues ; donc les points C′ et α, où elles coupent la conique et le cercle, sont en ligne droite avec le centre d'homologie F. De plus, O est le milieu de A′C′ et Fa' = Fα ; donc, en vertu de notre premier théorème, FP divise $a'\alpha$ en deux segments inversement proportionnels aux rayons vecteurs FA′, Fc' et l'on a

$$\frac{a'\,\mathrm{P}}{\alpha \mathrm{P}} = \frac{c'\mathrm{F}}{\mathrm{A'\,F}} = \frac{\mathrm{A'}f}{\mathrm{A'\,F}} \ (^{*}),$$

à cause de

$$c'\,\mathrm{F} = \mathrm{A'}f,$$

f étant le second foyer.

Toutes les propositions de l'auteur sont donc démontrées.

(*) Plusieurs fautes d'impression se sont glissées à cet endroit dans le texte des *Nouvelles Annales*.