NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

ERNEST DE JONQUIÈRES

Solution de la question 303

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 14 (1855), p. 435-440

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1855_1_14__435_1>

SOLUTION DE LA QUESTION 303

(voir page 117),

PAR M. ERNEST DE JONQUIÈRES,
Lieutenant de vaisseau (*).

QUESTION. *Étant donnés dans le même plan, de grandeur et de position, cinq segments* ab, cd, gh, ik, lm, *construire une conique qui coupe chaque segment harmoniquement en* a', b'; c', d'; etc.

Avant de résoudre cette question, proposons-nous la suivante qui sera un acheminement naturel vers celle dont il s'agit.

1^er^ PROBLEME AUXILIAIRE. *Étant donnés dans le même plan quatre points* α, β, γ, δ, *et un segment fixe* gh, *décrire une conique qui passe par les quatre points et qui coupe* gh *harmoniquement.*

Supposons qu'on ait décrit le faisceau de coniques qui passent par les quatre points α, β, γ, δ; chacune d'elles

(*) Commandant *la Lance*.

coupera la droite indéfinie $LghL'$ en deux points n, n' qui formeront involution avec les quatre points de rencontre des côtés du quadrilatère $\alpha\beta\gamma\delta$ par la transversale (*Géométrie supérieure*, n° 656). Donc les points variables n, n' marqueront sur LL' deux divisions homographiques en involution (n° 236). Les points doubles e, f de ces deux divisions, lesquels sont déterminés au moyen du quadrilatère $\alpha\beta\gamma\delta$, coupent harmoniquement tous les segments nn', et par conséquent aussi le segment inconnu $g'h'$ intercepté par la conique cherchée sur la transversale. Réciproquement, ce segment $g'h'$ divise harmoniquement ef; d'ailleurs, il faut qu'il divise harmoniquement le segment donné gh. Donc g' et h' sont les points doubles de l'involution déterminée par les deux segments ef, gh (*Géométrie supérieure,* n° 193). Il sera facile de les construire sans tracer aucune conique. Le problème est donc résolu, et l'on voit, de plus, qu'il n'admet qu'une seule solution.

Actuellement, supposons que les points γ, δ, au lieu d'être fixes sur la droite indéfinie qui les joint, s'y meuvent en divisant toujours harmoniquement le segment cd donné sur cette droite. Ils y marqueront deux divisions en involution. Si l'on fait passer par ces points, conjugués deux à deux dans chacune de leurs positions successives, et par les deux autres points fixes α, β, la conique *unique* qui divise harmoniquement le segment gh, on formera un faisceau de coniques qui couperont la droite LL' en des points $g'\ldots$, $h'\ldots$ formant deux divisions en involution dont les points doubles sont g et h. Or je démontrerai (ci-après, afin de ne pas rompre le fil des idées) que des coniques qui ont deux points communs, et qui, en outre, divisent en involution deux droites fixes, ont deux autres points communs (réels ou imaginaires), et, par conséquent (*Géométrie supérieure,* n° 743), divisent en involution une troisième droite quelconque. Prenons ik pour cette troisième droite, et soient e', f' les points doubles des divisions en involution que les coniques y déterminent (il suffira de deux coniques d'essai ou de fausse position pour trouver ces points, et encore ne sera-t-il pas nécessaire de les tracer). Soient i', k' les deux points qui divisent harmoniquement à la fois les deux segments ik et $e'f'$. Celle des coniques du faisceau qui nous occupe, qui passe par les points i' et k', jouit de la propriété de passer par les deux points donnés α, β et de diviser harmoniquement les trois segments donnés cd, gh, ik. Ceci est une conséquence évidente de ce qui précède. Cette conique est unique ; comme dans le premier problème, elle est complétement déterminée et facile à construire. On a donc une solution de ce nouveau problème auxiliaire.

2e Problème auxiliaire. *Par deux points donnés, faire passer une conique qui coupe harmoniquement trois segments donnés.*

Nous avons fait un nouveau pas vers la solution de la question proposée en éliminant deux points fixes et introduisant deux segments de plus. Nous allons éliminer les deux autres points et les remplacer par les deux derniers segments en suivant la même marche.

Supposons donc que les points α, β se meuvent sur la droite ab en ne cessant pas de diviser harmoniquement le segment ab, et, pour chaque position de ces deux points, supposons qu'on ait décrit la conique qui, passant par eux, coupe harmoniquement les trois autres segments cd, gh, ik (2e problème ci-dessus). On aura formé ainsi un faisceau de coniques qui marquent, sur chacune des quatre droites, deux divisions en involution, dont les points doubles sont respectivement a, b ; c, d ; g, h ; i, k. Or je démontrerai plus loin que des coniques qui satisfont à une telle condition sont circonscrites au même quadrilatère (réel ou imaginaire). Donc (*Géométrie supérieure,* n° 743) une cinquième droite quelconque, lm par exemple, est divisée par ces courbes en involution. Soient e'', f'' les points doubles de ces divisions et soient l', m' les deux points qui divisent harmoniquement à la fois les deux segments $e''f''$ et lm. Celle des coniques du faisceau en question qui passe par les points l' et m', et il n'y en a encore qu'une, coupera aussi harmoniquement les quatre autres segments donnés. Cette conique, facile à construire, est donc la conique demandée, et la question 298 est résolue.

Il reste maintenant à donner la démonstration des deux théorèmes sur lesquels je me suis appuyé dans le courant du discours.

Démonstration du 1er *théorème auxiliaire.* Plusieurs coniques passent par deux points fixes a, b et divisent harmoniquement deux droites données CD, GH; il faut prouver qu'elles sont toutes circonscrites à un même quadrilatère $ab\varepsilon\varphi$. Soient Σ, Σ' deux de ces coniques, a, b, ε, φ leurs points communs, et supposons, s'il est possible, qu'une troisième conique Σ'' ne passe pas par les deux points (réels ou imaginaires) ε, φ. Soient γ, δ, les points où Σ'' coupe la droite CD. Parmi toutes les coniques du faisceau circonscrit au quadrilatère $ab\varepsilon\varphi$, il en est une, Σ''', qui passe par γ et δ, puisque la droite CD coupe les coniques $\Sigma, \Sigma', \Sigma'''$ en six points en involution (*Géom. sup.* n° 743), et que, par hypothèse, les points γ et δ, intersection de Σ'', sont en involution avec les quatre autres. Ainsi les deux coniques Σ'', Σ''' ont déjà en commun les quatre points a, b, γ, δ. Or le premier problème auxiliaire (voir sa conclusion) prouve que par quatre points donnés on ne peut mener qu'une seule conique qui coupe harmoniquement un segment gh situé sur une autre droite GH, c'est-à-dire qui coupe cette droite en deux points faisant partie de l'involution dont g et h sont les points doubles; d'ailleurs la conique Σ''' remplit cette condition *de fait*, et la conique Σ'' la remplit *par hypothèse*; donc Σ'' et Σ''' se confondent et Σ'' est circonscrite au quadrilatère $ab\,\varepsilon\varphi$.

C. Q. F. D.

Démonstration du 2^e^ théorème. Plusieurs coniques Σ, Σ', Σ'', etc., divisent harmoniquement quatre droites données AB, CD, GH, IK; il s'agit de prouver qu'elles sont circonscrites au même quadrilatère. Soient ε, φ, ε', φ' les points d'intersection des deux premières. Par ces points et par les deux points α, β, où Σ'' rencontre AB, décrivons une conique Σ'''; elle coupe les trois autres droites en des points qui sont en involution avec ceux où les coupent Σ et Σ'. Prouvons que Σ'' se confond avec Σ'''. Pour cela, soient γ et δ les points où Σ''' coupe la droite CD; si l'on prouvait que Σ'' passe par ces deux points, tout serait démontré, à cause du théorème précédent.

Supposons donc, s'il est possible, que Σ'' coupe CD en deux points γ', δ' autres que γ et δ. Parmi l'infinité de coniques qui passent par les quatre points α, β, γ', δ' il n'y en a qu'une (1^er^ Problème) qui coupe la droite GH en deux points qui forment involution avec les quatre qui s'y trouvent marqués par les coniques Σ, Σ'; cette conique doit donc être Σ''; mais comme il ne reste plus rien d'arbitraire dans sa détermination, on n'est plus libre de la faire varier de manière à ce que, tout en remplissant les trois conditions déjà énoncées, elle puisse encore satisfaire à celle qu'impose la quatrième droite IK. Cette dernière condition ne pourra donc pas, en général, être remplie par Σ'', tant que les points γ', δ' différeront de γ et δ. Or Σ'' y satisfait *par hypothèse*; donc les points γ', δ' coïncident avec γ et δ, et Σ'' se confond avec Σ''' qui remplit, *de fait,* toutes les conditions. Donc le théorème est démontré.

La question 298 donne lieu *corrélativement* à la suivante :

Question. *Étant donnés dans le même plan de grandeur et de position, cinq angles, construire une conique dont les tangentes divisent chaque angle harmoniquement.*

La solution serait évidemment corrélative de la précédente.