Serret

Bibliographie

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 14 (1855), p. 402-413

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1855_1_14__402_1>

BIBLIOGRAPHIE

(voir p. 272)

ALGÈBRE SUPÉRIEURE ; par M *Serret*. (Fin.)

9^{e} *Leçon* (118-132). On fait voir comment M. Minding s'est servi du parallélogramme de Newton pour déterminer le degré de l'équation finale dans l'élimination, parallélogramme qui sert, comme on sait, dans la recherche des asymptotes hyperboliques de divers ordres d'une courbe dont l'équation est donnée. M. Liouville a fait emploi de ces asymptotes pour calculer d'une manière élégante les divers termes de l'équation finale. C'est ce que donne aussi la méthode de Bezout. « M. Liouville a déduit, des résultats qui précèdent, la démonstration d'un théorème *curieux* de géométrie (p. 128). » Il s'agit d'un *magnifique* théorème sur les tangentes parallèles dans les courbes et sur les plans parallèles dans les surfaces. Il me semble qu'il aurait été convenable de dire qu'on doit cette *curiosité* à M. Chasles (*) (voir *Nouvelles Annales*, tome IV, p. 153 et 178).

10e *Leçon* (133-143). Extension des résultats de la leçon précédente aux surfaces.

11e *Leçon* (144-162). Théorie des fonctions semblables des racines d'une équation.

Dans cette théorie créée par Lagrange on a besoin de la proposition suivante :

Le nombre des valeurs distinctes *que peut prendre une fonction de* m *lettres quand on y permute les lettres qu'elle renferme, est toujours un diviseur du produit* m!

Démonstration. Si toutes les permutations sont différentes les unes des autres, le nombre de ces valeurs est évidemment m!. Formons ces permutations *normalement*, comme nous l'avons indiqué (*Nouvelles Annales*, t. I, p. 127) (**), et écrivons-les les unes au-dessous des autres; le même mode qui sert à dériver la deuxième de la première fait dériver la quatrième de la troisième, la sixième de la cinquième, etc; donc, si la première permutation devient égale à la deuxième, la quatrième de-

(*) Le théorème sur les plans appartient aussi à M. Chasles.

(**) On persiste à ne pas parler de cette formation normale (Hindenbourg) dans les Traités élémentaires, et je persiste à la recommander parce qu'elle est essentielle.

viendra égale à la troisième, la sixième à la cinquième, etc ; le nombre de permutations distinctes sera donc $\frac{m!}{2}\cdot$ La troisième permutation dérive de la première, comme la sixième de la quatrième, la neuvième de la septième, etc. Donc, si les trois premières permutations deviennent égales, les quatrième, cinquième et sixième permutations seront aussi égales, et ainsi donc le nombre des permutations distinctes se réduit à $\frac{m!}{3}$ etc.

C. Q. F. D.

Soit l'équation

$$(1) \qquad x^m + p_1 x^{m-1} + p_2 x^{m-2} + \ldots + p_m = 0,$$
$$(x_1,\ x_2,\ \ldots x_m).$$

deux fonctions des racines sont semblables lorsqu'une permutation quelconque dans l'une amène une permutation semblable dans l'autre.

Exemples : $x_1 + x_2$ et $x_1 x_2$ sont des fonctions semblables ; à $x_1 + x_3$ correspond $x_1 x_3$, etc., mais $x_1 - x_2$ et $x_1 x_2$ ne sont pas semblables, car à $x_2 - x_1$ correspond $x_2 x_1$; $x_1 - x_2$ et $x_1 - x_2$ sont de signes opposés, tandis que $x_1 x_2$ et $x_2 x_1$ sont égaux, mais $x_1 - x_2$ et et $x_1^3 - x_2^3$ sont semblables. Cette définition admise, lorsque l'on connaît la valeur numérique d'une de ces fonctions, on peut en déduire la valeur numérique des fonctions semblables. M. Hermite en a donné une démonstration plus simple que celle qu'on lit ici (*Nouvelles Annales,* t. I, p. 329) ; mais il n'a pas discuté les cas exceptionnels, d'ailleurs très-faciles, où certaine équation a des racines égales.

Le théorème subsiste encore lorsque les fonctions ne sont pas semblables ; on le ramène facilement au cas où les fonctions sont semblables (p. 161) ; ainsi, étant donnée la valeur d'une fonction des racines, on peut trouver une racine.

12[e] *Leçon* (163-170). Applications numériques qui facilitent l'intelligence de la leçon précédente et une nouvelle démonstration du théorème de Lagrange, par Galois.

13[e] *Leçon* (171-189). Équations binômes; théorie des *racines primitives,* créée par Euler; manière de les trouver et leur nombre, application du principe de M. Sturm à l'équation

$$V_n + V_{n-1} + \ldots + V_2 + V_1 + 1 = 0$$

ou

$$V_n = x^n + \frac{1}{x^n};$$

faisant

$$x + \frac{1}{x} = z,$$

on a

$$(1) \qquad V_n = zV_{n-1} - V_{n-2},$$

V_n est une fonction de z.

A l'inspection de cette relation, on voit : 1° que les V forment une série récurrente, dont l'échelle de relation est z_1, — 1 ; 2° qu'on peut appliquer à ces fonctions V les mêmes raisonnements qui servent à opérer la séparation des racines dans le théorème de M. Sturm. Faisant successivement

$$x = -1,$$

d'où

$$z = -2; \quad x = +1, \quad \text{d'où} \quad z = 2,$$

on trouve que l'équation $V_n = 0$ a μ racines réelles comprises entre + 2 et — 2.

Posons

$$U_n = V_n + V_{n-1} + \ldots + V_2 + V_1 + 1.$$

U_n est une fonction du degré n en z; on a la relation

$$U_n = z U_{n-1} - U_{n-2},$$

et l'on conclut que l'équation $U_\mu^2 = 1$ a μ racines réelles comprises entre -2 et 2.

Toutes les fois que la relation (1) existe, le principe de M. Sturm est applicable.

14ᵉ *Leçon* (190-200). Roule encore sur les fonctions V_n et U_n de la leçon précédente; donne les équations différentielles linéaires du deuxième ordre auxquelles ces fonctions satisfont. On déduit de ces équations les expressions développées de ces fonctions, et aussi les développements de $\cos na$ et de $\frac{\sin na}{\sin a}$ en fonction de $\cos a$. On ne mentionne pas les relations de ces fonctions avec les séries récurrentes.

15ᵉ *Leçon* (201-217). Résolution de l'équation générale du troisième degré. Hudde, Lagrange, Tschirnhaus, Euler.

16ᵉ *Leçon* (218-232). C'est une suite. Équations du troisième degré dont deux racines peuvent s'exprimer rationnellement en fonction de la troisième. On regrette que l'auteur, au lieu de s'attacher à un cas particulier, n'ait pas donné la théorie de M. Hill, généralisée par M. Minding, et où l'on démontre que les racines d'une équation algébrique quelconque sont liées *cycliquement* les unes aux autres (*Nouvelles Annales*, t. VII, p. 443), et l'on parvient facilement et d'une manière directe aux équations (7), (8), (9), (10) qu'on obtient ici assez péniblement (voir *Nouvelles Annales*, tome VII, p. 446).

M. Vincent a démontré que la méthode de Lagrange (fractions continues) pour la résolution numérique des équations amène nécessairement à la séparation des racines; observation très-importante et qui aurait fait une grande sensation, si le théorème de M. Sturm n'avait pas déja subsisté (1832) (*Journal de M. Liouville*, tome I, page 341, 1836). Faisant l'application à l'équation

$$x^3 - 7x + 7 = 0,$$

le perspicace auteur remarque que les trois fractions continues sont terminées par les mêmes quotients, et il ajoute: « Cette propriété mériterait peut-être un examen spécial. » M. Lobbato, géomètre hollandais, a fait cet examen (*Journal de M. Liouville*, t. IX, p. 177, 1844) et démontre que toutes les équations du troisième degré qui ont cette forme

$$x^3 - 3\frac{A^2 + A + 1}{A'^2}x + \frac{2A^3 + 3A^2 + 3A + 1}{A'^3} = 0$$

jouissent de cette propriété. A est un nombre entier quelconque et A′ un diviseur quelconque de $A^2 + A + 1$; faisant

$$A = 4, \quad A' = 3,$$

on trouve l'équation particulière

$$x^3 - 7x + 7 = 0.$$

Ce beau résultat, corrigé en quelques points, termine la leçon, et dans la Note VII (p. 476), M. Serret établit avec une extrême sagacité qu'on rencontre ce genre d'équations parmi celles dont le quantième du degré est divisible par 2 ou par 3 et qui sont irréductibles; indique le moyen de former ces équations. La division du cercle en sept ou neuf parties égales conduit à une telle équation du troi sième degré, et la division du cercle en quinze parties égales, à une équation analogue du quatrième degré. C'est un des plus beaux produits analytiques que l'auteur a consigné dans le *Journal de M. Liouville*, tome XV.

17ᵉ *Leçon* (233-243). Résolution générale de l'équation générale du quatrième degré. Ferrari, Lagrange, Descartes, Tschirnhaus et Euler.

18ᵉ *Leçon* (244-262). Traitée d'après Lagrange. De la résolution des équations dont le degré est un nombre premier ou dont le degré est un nombre composé, d'après la Note XIII du *Traité de la résolution des équations numériques*, exposée avec une grande clarté.

19ᵉ et 20ᵉ *Leçons* (263-276, 277-288). En permutant les deux lettres a et b dans $(a-b)^2$, on obtient deux formes et une seule valeur; en permutant les trois lettres a, b, c dans l'expression $(a+\alpha b+\alpha^2 c)^3$ où α est racine de l'équation

$$\alpha^2+\alpha+1=0,$$

on obtient six formes et deux valeurs; en permutant les quatre lettres a, b, c, d dans l'expression $(a+b-c-d)^2$, on obtient six formes et trois valeurs. Nous avons vu ci-dessus que la question est de savoir comment on peut former des fonctions qui aient un nombre donné de valeurs. Deux leçons roulent sur cette question qu'on est bien loin de savoir résoudre généralement. Nous devons nous contenter de transcrire les théorèmes qu'on est parvenu à établir, sauf à en donner ailleurs les démonstrations.

1. Le nombre des valeurs d'une fonction de n lettres est toujours un diviseur de $n!$. (LAGRANGE.)

2. Une fonction de cinq lettres ne peut jamais avoir ni trois valeurs, ni quatre valeurs. (RUFFINI.)

3. p étant le plus grand nombre premier divisant n, si une fonction de n lettres a moins de p valeurs, elle ne peut en avoir plus de deux. (CAUCHY.)

4. Si une fonction de six lettres a moins de six valeurs, elle ne peut en avoir plus de deux. (CAUCHY.)

5. Si une fonction de n lettres a n valeurs, elle est symétrique par rapport à $n-1$ lettres. (ABEL.)

6. Si $n > 7$ et s'il y a au moins un nombre premier p compris entre $n-2$ et $\frac{n}{2}$, alors si une fonction de n lettres a moins de n valeurs, elle ne peut en avoir plus de deux. (BERTRAND.)

7. Si $n > 7$ et s'il n'y a aucun nombre premier entre $n-2$ et $\frac{n}{2}$, alors si une fonction de n lettres a moins de n valeurs, elle ne peut en avoir plus de deux.

8. Si une fonction de n lettres a plus de n valeurs, n étant plus grand que 9, elle en a au moins $2n$.

(BERTRAND.)

9. Lorsque $n > 7$, il y a au moins un nombre premier entre $n-2$ et $\frac{n}{2}$. (TCHEBICHEF.)

Ce théorème est l'objet de la Note XV (p. 582).

La démonstration est fondée sur la relation suivante : Soit $\mathrm{T}(z)$ la somme des logarithmes népériens de tous les nombres entiers qui ne surpassent pas z, et $\theta(z)$ la somme de tous les nombres premiers qui ne surpassent pas z. Faisons

$$\psi(z) = \theta(z) + \theta\left(z^{\frac{1}{2}}\right) + \theta\left(z^{\frac{1}{3}}\right) + \theta\left(z^{\frac{1}{4}}\right) + \ldots ;$$

la série se prolonge jusqu'au terme qui devient zéro, alors on a

$$\mathrm{T}(z) = \psi(z) + \psi\left(\frac{z}{2}\right) + \psi\left(\frac{z}{3}\right) + \psi\left(\frac{z}{4}\right) + \ldots .$$

Cette relation importante a été publiée en France par

M. de Polignac, avant que le travail de M. de Tchebichef y fût connu (*).

21^e^ *Leçon* (289-298). Classification des fonctions; démonstration de l'impossibilité de résoudre les équations supérieures au quatrième degré.

22^e^ *Leçon* (290-309). Quatre opérations : 1° addition et soustraction; 2° multiplication.

Cette leçon et la suivante sont tirées des articles de Wantzel, insérés dans les *Nouvelles Annales*, t. II, p. 117, t. III, p. 325, t. IV, p. 57. A partir de la page 35 on copie même textuellement ce journal sans le nommer. La dichotomie abélienne des fonctions est clairement exposée; nous y reviendrons.

23^e^ et 24^e^ *Leçons* (310-324, 325-342). Théorie des congruences et des racines primitives et des nombres complexes (imaginaires de Gallois).

25^e^ *Leçon* (343-370). Les commencements de la 25^e^ leçon se trouvent aussi dans les *Nouvelles Annales* (t. III, p. 204, 214, 337) et plus simplement, parce qu'on y fait usage de la notation leibnitzienne. Nous nous proposons de donner, à l'aide de la même notation, les résultats importants renfermés dans ces trois leçons et nous croyons avec avantage.

26^e^ et 27^e^ *Leçons* (371-383, 384-400). Les sections 4^e^, 5^e^ et 6^e^ des *Disquisitiones* contiennent le germe et le point de départ de tous les travaux arithmologiques du XIX^e^ siècle; de même, la 7^e^ section de cette immortelle production contient le germe et le point de départ de tous les travaux sur la théorie des équations et principalement ceux de Gallois et d'Abel qui forment la matière de ces deux leçons. L'illustre géomètre de Gottingue a montré

(*) M. de Polignac, officier d'artillerie devant Sebastopol, a rencontré dans une entrevue parlementaire le frère de M. de Tchebichef, officier de la même arme dans Sebastopol que l'équation irréductible $\frac{x^p - 1}{x - 1} = 0$ (p nombre premier) jouit de la propriété que chaque racine est une fonction rationnelle de l'une quelconque des autres; et que les radicaux qui entrent dans l'expression des racines ont pour indices un des facteurs premiers de $p - 1$. Abel a généralisé cette expression et l'a étendue à des équations irréductibles de degré quelconque. Maintenant ces travaux sont arriérés, étant tous compris et rectifiés dans le superbe Mémoire de M. Léopold Kronecker. La traduction du résumé de ces recherches fait par le profond analyste lui-même est contenue dans la Note XIII (p. 560).

M. Serret a aussi enrichi son ouvrage de la traduction d'un Mémoire géométrico-algébrique de M. Otto Hesse, le célèbre disciple de Jacobi. Les courbes du troisième degré ont neuf points d'inflexion, dont trois réels et toujours en ligne droite (Maclaurin). Ces points dépendent d'une équation du neuvième degré que M. Otto Hesse démontre être toujours résoluble algébriquement.

28e *Leçon* (400-414). C'est la 7e section des *Disquisitiones* sur la division de la circonférence. On donne une construction géométrique du polygone de dix-sept côtés. Dans le Journal de Crelle (t. XXIV, p. 251), M. Staudt indique une construction qui serait la plus simple de toutes, étant analogue à celle du pentagone, si des fautes typographiques ne la rendaient inintelligible; il est extrêmement à désirer que le savant géomètre veuille indiquer les corrections qui sont urgentes, vu l'absence de figures (*Nouvelles Annales*, t. XI, p. 390).

29e *Leçon* (415-423). Traite de la formule de Lagrange pour développer z en série ordonnée suivant la puissance de t au moyen de l'équation

$$z = x + tf(z),$$

z se réduisant à x lorsque $t = 0$, et l'on en donne l'application à l'équation

$$z = x + tz^m.$$

M. Serret adopte la démonstration de M. Duhamel (*Cours de Mécanique*). On nous a communiqué une autre démonstration encore plus simple et qui montre en même temps que la série ne s'applique qu'à la plus petite racine.

30^e *et dernière Leçon* (424-430). Solution d'une question de calcul aux différences partielles indéterminées qui se rattache à la représentation géométrique des fonctions elliptiques et abéliennes. On a l'équation

$$dx^2 + dy^2 = \frac{c^2 dz^2}{(z^2 - a^2)(z^2 - \alpha^2)}.$$

il faut trouver pour x et y des fonctions réelles et rationnelles de z qui ne deviennent pas infinies pour

$$z = \pm a, \quad z = \pm \alpha;$$

c est une constante réelle et a et α sont deux constantes imaginaires conjuguées. Cette belle solution, qu'on doit à M. J. Serret, a obtenu les honneurs de l'impression dans le tome XI des *Savants étrangers*.

La longue analyse que nous venons de faire de cet ouvrage ne donne pourtant qu'une idée incomplète de son mérite, des qualités qui y brillent, des richesses qui y sont étalées. Lorsque des hommes puissants dans le monde, ennemis de tout idéal, veulent faire reléguer dans la région d'inutiles chimères les travaux des Lagrange, Laplace, Legendre, etc., de tous nos illustres analystes; lorsque, dans une autre sphère, des écrivains diversement passionnés s'efforcent de démolir Corneille, Racine, Voltaire, nos plus illustres génies littéraires: quoique de tels efforts ne puissent inspirer de craintes plus sérieuses qu'on n'en aurait pour la statue de Napoléon si un essaim de fourmis s'avisaient de creuser sous la colonne de la place Vendôme, néanmoins, il est agréable, il est consolant de rencontrer des hommes de talent qui consolident, illustrent les productions des grands maîtres et marchent sur leurs traces. Puisse M. J. Serret nous gratifier de nouvelles leçons; il rencontrera toujours dans le public géomètre un auditoire attentif et reconnaissant.