NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

J. MURENT

Seconde solution de la question 300

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 14 (1855), p. 368-370

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1855_1_14__368_1>

SECONDE SOLUTION DE LA QUESTION 300

(voir page 254),

PAR M. J. MURENT,
Licencié ès Sciences.

PROBLÈME. *Trouver une fonction de* a, b, c, d *telle, qu'en y faisant* b = a *elle devienne* $\frac{c-d}{2(c+d)}$, *et en y faisant* d = c *elle devienne* $\frac{a-b}{2(a+b)}$. LEIBNITZ.

Solution. Désignons par $F(a, b, c, d)$ la fonction demandée. Cette fonction devant se réduire à $\frac{c-d}{2(c+d)}$

lorsqu'on y fait $b=a$, sera de la forme

$$(1)\quad F(a, b, c, d)=\frac{c-d}{2(c+d)}+(a-b)f(a, b, c, d),$$

f étant une fonction inconnue qui ne devient pas infinie lorsque $b=a$. Afin de déterminer cette fonction f, faisons $d=c$ dans l'égalité (1). Le premier membre devra, d'après l'énoncé, se réduire à $\frac{a-b}{2(a+b)}$, et nous aurons

$$\frac{a-b}{2(a+b)}=(a-b)f(a, b, c, c),$$

et, par suite,

$$f(a, b, c, c)=\frac{1}{2(a+b)}.$$

Cette relation montre que la fonction $f(a, b, c, d)$ doit être telle, qu'elle devienne $\frac{1}{2(a+b)}$, lorsqu'on y fait $d=c$: donc cette fonction est de la forme

$$f(a, b, c, d)=\frac{1}{2(a+b)}+(c-d)\varphi(a, b, c, d);$$

φ étant une nouvelle fonction qui ne devient pas infinie pour $d=c$. On voit de plus, par cette dernière égalité, que φ doit aussi rester finie pour $b=a$ puisqu'il en est ainsi de la fonction f.

Substituant la dernière valeur de f dans l'égalité (1), il vient

$$F(a, b, c, d)=\frac{c-d}{2(c+d)}$$

$$+\frac{a-b}{2(a+b)}+(a-b)(c-d)\varphi(a, b, c, d),$$

ou, en réduisant,

$$F(a, b, c, d) = \frac{ac - bd}{(a+b)(c+d)}$$

$$+ (a-b)(c-d)\varphi(a, b, c, d).$$

Cette formule donnera une infinité de fonctions satisfaisant aux conditions de l'énoncé; il suffira de prendre pour φ une fonction quelconque de a, b, c, d, qui ne devienne infinie ni pour $b = a$, ni pour $d = c$.

L'expression $\frac{ac - bd}{(a+b)(c+d)}$ sera la plus simple des fonctions qui répondent à la question.