

YVON VILLARCEAU

**Théorie analytique du gyroscope
de M. L. Foucault**

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 14
(1855), p. 343-365

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1855_1_14__343_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1855, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

THÉORIE ANALYTIQUE DU GYROSCOPE DE M. L. FOUCAULT;

PAR M. YVON VILLARCEAU (*).

1. Lorsque ce Mémoire a été écrit, la théorie du gyroscope avait déjà été traitée par M. Quet, et les résultats des recherches de ce physicien avaient été publiés dans les *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences* (t. XXXV, pages 686 et suivantes). Cette publication avait échappé à M. Yvon Villarceau, dont l'attention avait été détournée par d'autres préoccupations. Il hésita d'abord à livrer son manuscrit au rédacteur des *Nouvelles Annales*; mais ayant obtenu les intégrales rigoureuses des équations principales du problème, alors que M. Quet n'avait présenté que des solutions suffisamment approchées, et presumant, d'ailleurs, que le travail de ce savant pourrait

(*) Ce Mémoire a été remis par M. Yvon Villarceau le 1^{er} février 1853. La publication de son ouvrage sur l'*Établissement des Arches de pont et les changements survenus dans ses fonctions* à l'Observatoire de Paris ont empêché jusqu'ici M. Yvon Villarceau de surveiller l'impression du Mémoire actuel.

différer du sien par la forme en équation (*), M. Yvon Villarceau s'est décidé à publier un travail qu'il considère comme offrant plutôt d'intéressants exercices de mécanique, que des moyens sérieux de remplacer les déterminations astronomiques par des expériences faites à l'aide du gyroscope.

La solution du problème des latitudes et des azimuts à l'aide de l'instrument de M. L. Foucault est étudiée dans ce Mémoire; mais l'auteur insiste pour que l'on n'envisage ses recherches que comme de purs exercices de mécanique.

La théorie du gyroscope a pu être fondée sur les théorèmes qui concernent les forces apparentes dans les mouvements relatifs; mais ces théorèmes n'étant pas encore très-généralement répandus, malgré les travaux des géomètres et des mécaniciens, l'auteur a préféré baser ses recherches sur la considération des mouvements absolus.

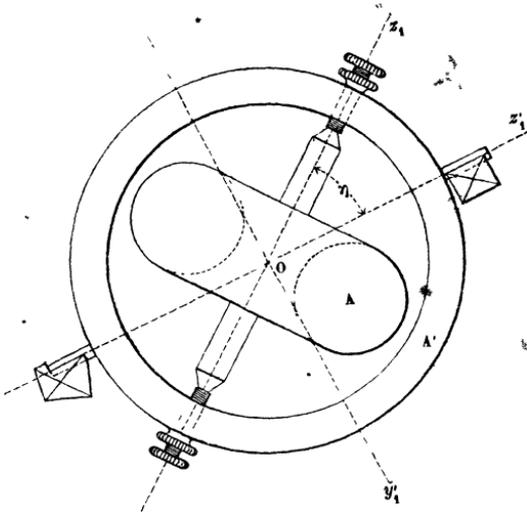
2. Le gyroscope consiste principalement en un anneau A' (*fig. 1*) mobile autour d'un axe fixe Oz' (**) et dans l'intérieur duquel un solide de révolution A tourne autour de son axe de figure Oz_1 , lequel est entraîné dans le mouvement de l'anneau. Le solide de révolution est un tore dans l'appareil de M. Foucault, et l'axe de figure y est perpendiculaire à l'axe de l'anneau. Nous regarderons le solide de révolution comme ayant une figure quelconque et étant incliné sur l'axe de l'anneau d'un angle quel-

(*) La publication faite depuis par M. Quet dans le *Journal* de M. Liouville a pleinement confirmé cette prévision.

(**) La disposition physique de l'axe de rotation Oz'_1 , dans l'appareil de M. L. Foucault, n'est pas celle que nous donnons dans la figure. Nous supposons ici que l'anneau tourne autour de deux tourillons cylindriques, attendu que cette forme de tourillons est la seule qui se prête aisément au calcul des frottements.

conque η . Seulement, pour abrégér, nous lui consacrerons la dénomination de *tore*.

FIG 1.



Nous admettrons que les centres de gravité du tore et de l'anneau coïncident en un point O, et que l'axe de figure du tore et l'axe de rotation de l'anneau se coupent en ce même point. Nous admettrons encore que ce dernier axe soit un axe principal de l'anneau. Quant à l'axe de figure du tore, nous établirons une pareille condition, qui sera nécessairement remplie si la densité du tore est uniforme.

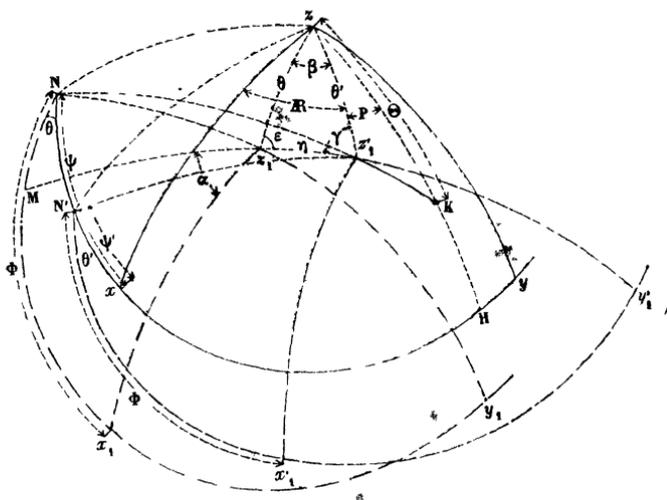
Rappelons enfin une convention relative au sens positif des vitesses de rotation et des moments. D'après la théorie des projections, la droite autour de laquelle s'effectue un mouvement de rotation réel ou virtuel d'un corps solide, et la droite à laquelle se rapportent les moments des forces, présentent chacune deux sens ou côtés

distincts. L'un des côtés en particulier est pris pour le sens positif de l'axe de rotation ou des moments, on l'appelle alors *axe de rotation* ou *axe des moments* : ce côté reste arbitraire tant que le sens positif des rotations ou des moments n'est pas défini ; il est déterminé dans le cas contraire. Faisons coïncider l'un des trois axes rectangulaires x, y, z avec un axe de rotation ; la rotation réelle ou virtuelle autour de cet axe sera positive, lorsque le mouvement projeté sur le plan des deux autres axes sera celui de y vers z , de z vers x ou de x vers y , c'est-à-dire aura lieu dans l'ordre alphabétique des trois lettres x, y et z , supposées rangées circulairement. Réciproquement, l'axe d'une rotation ou d'un moment étant supposé connu, pour trouver le sens positif de la rotation ou du moment autour de cet axe, il faudra amener l'un des trois axes x, y, z à coïncider avec l'axe donné, en ayant le soin de ne pas permuter les deux autres, et reconnaître l'ordre alphabétique de ces derniers. Le sens positif de la rotation ou du moment sera celui que détermine l'ordre alphabétique ainsi reconnu.

3. Ceci posé, du point O comme centre, décrivons une sphère, et menons par ce point un plan de direction fixe qui coupe la sphère suivant le grand cercle $NN'xy$ (*fig 2*). Menons dans ce plan deux axes rectangulaires x et y , et perpendiculairement un axe z . Pour fixer les idées, notre plan fixera parallèle au plan de l'équateur terrestre, que nous supposerons immobile pendant toute la durée des expériences. Les points x, y, z , où ces axes percent la sphère, seront : l'un le point vernal, le second plus avancé de 90 degrés dans le sens de la rotation de la Terre ; le troisième sera le pôle boréal. Supposons maintenant que l'on ait fait choix de ceux des côtés des axes de rotation de l'anneau et du tore que l'on regardera comme positifs, et qu'on les prenne pour axes mobiles z_1 et z'_1 ; nous mène-

rons dans les plans de leurs équateurs deux autres axes rec-

FIG 2.



tangulaires mobiles que nous désignerons par x_1, y_1 et x'_1, y'_1 . Seulement, nous insisterons sur ce que l'ordre alphabétique soit celui des axes fixes x, y, z . En d'autres termes, ces trois systèmes d'axes, étant superposés convenablement, doivent permettre la coïncidence des côtés de même dénomination: on pourra vérifier dans un instant que cette condition est remplie.

Le plan de l'équateur du tore coupe le plan de l'équateur terrestre en un point N distant de l'axe des x d'un angle $\overline{Nx} = \psi$ compté de x en sens contraire du mouvement de la Terre, et fait avec le plan des xy un angle θ au-dessous de ce plan; nous désignons par Φ la distance de l'axe x_1 au point N , angle qui se trouve compté de N , dans le sens de x à y , lorsque θ est aigu; l'angle Ny_1 est $90^\circ + \Phi$. Il s'ensuit que le point N correspond au nœud

descendant de l'équateur du tore sur l'équateur terrestre. Le pôle de l'équateur du tore est en z_1 et fait avec l'axe des z un angle qui est précisément l'angle θ . Cet angle est compris entre zéro et deux droits, tandis que les angles ψ et Φ n'ont pas de limites.

Les mêmes lettres accompagnées d'un accent désignent les mêmes choses relativement à l'anneau. De la fixité relative de l'axe de l'anneau, il résulte que la distance polaire $\overline{zz'_1} = \theta'$ est constante. Le plan qui joint les pôles z et z'_1 est entraîné dans le mouvement diurne; l'angle dièdre $\widehat{xxz'_1}$ est l'ascension droite R de l'axe z'_1 de l'anneau. En désignant par ω la vitesse angulaire de la Terre et dt l'élément du temps, on a

$$(1) \quad \frac{dR}{dt} = \omega.$$

Les pôles z_1 et z'_1 , dont la distance constante est η , déterminent un plan que nous nommerons, pour abrégé, *plan de l'anneau*. Par analogie, nous appellerons *plan horaire*, le plan qui passe par l'axe de l'anneau et l'axe terrestre. Le plan de l'anneau fait avec le plan horaire un angle γ qui est compté, à partir du dernier, dans le sens du mouvement de la Terre. Cet angle γ suffit évidemment pour déterminer la position de l'anneau: Nous fixerons l'axe y'_1 dans le plan de l'anneau et du côté opposé à l'angle η à partir de z'_1 ; l'axe x'_1 sera perpendiculaire à ce dernier plan, et en arrière de y'_1 (*fig 2*) d'un angle droit, dans le plan de l'équateur de l'anneau.

Il reste à fixer la position du tore relativement à l'anneau. A cet effet, prolongeons le plan de l'anneau jusqu'à sa rencontre en M avec l'équateur du tore: nous désignerons par α l'angle $\widehat{Mz_1x_1}$ que fait le méridien du tore qui contient l'axe x_1 avec le prolongement z_1M du

plan de l'anneau, compté à partir de celui-ci dans le sens du mouvement terrestre.

L'angle γ qui détermine la situation de l'anneau et l'angle α qui fixe celle du tore relativement à l'anneau sont les quantités qu'il s'agit d'exprimer en fonction du temps.

4. Établissons maintenant les relations de position des axes mobiles entre eux.

x_1 étant le pôle de $Mz_1z'_1$, l'arc qui joindrait z_1 et x'_1 lui est perpendiculaire; il vient donc $\widehat{x_1z_1y'_1} = 90^\circ - \alpha$, d'où

$$(2) \quad \cos(x_1, x'_1) = \sin \alpha.$$

Joignons x_1 et y'_1 (*); le triangle $x_1z_1y'_1$, où l'angle en z_1 est $180^\circ - \alpha$, donnera, à cause de $\widehat{z_1y'_1} = 90^\circ + \eta$,

$$(3) \quad \cos(x_1, y'_1) = -\cos \eta \cos \alpha;$$

le triangle $x_1z_1z'_1$ donnera de même

$$(4) \quad \cos(x_1, z'_1) = -\sin \eta \cos \alpha.$$

Formons le triangle $x'_1z_1y_1$; l'angle en z_1 sera α , et il viendra

$$(5) \quad \cos(y_1, x'_1) = \cos \alpha:$$

on aura, par le triangle $y_1z_1y'_1$, où l'angle en z_1 est $90^\circ - \alpha$,

$$(6) \quad \cos(y_1, y'_1) = \cos \eta \sin \alpha,$$

puis, dans le triangle $y_1z_1z'_1$, où l'angle en z_1 est encore $90^\circ - \alpha$,

$$(7) \quad \cos(y_1, z'_1) = \sin \eta \sin \alpha.$$

(*) Pour ne pas trop compliquer la figure, on n'y a pas opéré cette jonction, ni d'autres qui sont indiquées plus loin; mais le lecteur y suppléera aisément par la pensée.

On a d'ailleurs directement

$$(8) \quad \begin{cases} \cos(z_1, x') = 0, \\ \cos(z_1, y') = -\sin \eta, \\ \cos(z_1, z') = +\cos \eta. \end{cases}$$

Considérons le triangle Nzz_1 ; les arcs Nz , Nz_1 étant de 90 degrés, les angles en z et z_1 sont pareillement droits; il en résulte $\widehat{Nzx} + \widehat{xzz_1} = 90^\circ$, ou bien, en désignant par β l'angle $\widehat{z_1zz'}$,

$$(8 \text{ bis}) \quad \psi + \mathfrak{K} - \beta = 90^\circ.$$

A cause que l'angle en z_1 dans le même triangle est droit, il vient, en désignant par ε l'angle $\widehat{zz_1z'}$, $\varepsilon + \widehat{Nz_1M} = 90^\circ$, ou

$$(9) \quad \Phi - \alpha = 90^\circ - \varepsilon.$$

Le triangle $N'zz_1$, pareillement birectangle, donne d'abord

$$(10) \quad \psi' = 90^\circ - \mathfrak{K},$$

puis ensuite $\gamma + \widehat{Mz_1N'} = 90^\circ$; mais $\widehat{Mz_1N'} = 90^\circ - \Phi'$, il en résulte

$$(11) \quad \gamma = \Phi'.$$

La valeur de ψ tirée de l'équation (8 bis)

$$(12) \quad \psi = 90^\circ - \mathfrak{K} + \beta,$$

comparée à celle de ψ' , donne d'ailleurs

$$(13) \quad \psi - \psi' = \beta.$$

A ces relations nous joindrons immédiatement quelques-unes de celles que fournit le triangle zz_1z' . Par la proportionnalité des sinus, on a d'abord

$$(14) \quad \begin{cases} \sin \beta \sin \theta = \sin \eta \sin \gamma, \\ \sin \theta' \sin \gamma = \sin \theta \sin \varepsilon. \end{cases}$$

Les équations qui donnent le cosinus de l'un des angles en fonction des sinus et cosinus des côtés peuvent s'écrire

$$(15) \quad \begin{cases} \cos \eta \cos \theta' + \sin \eta \sin \theta' \cos \gamma = \cos \theta, \\ \cos \eta \cos \theta + \sin \eta \sin \theta \cos \varepsilon = \cos \theta', \\ \cos \theta' \cos \theta + \sin \theta' \sin \theta \cos \beta = \cos \eta. \end{cases}$$

Deux des formules inverses sont

$$(16) \quad \begin{cases} -\cos \gamma \cos \varepsilon + \sin \gamma \sin \varepsilon \cos \eta = \cos \beta, \\ -\cos \beta \cos \gamma + \sin \beta \sin \gamma \cos \theta' = \cos \varepsilon. \end{cases}$$

Enfin il existe une relation peu en usage et qui sert à démontrer la formule désignée quelquefois par *formule des cotangentes*. Voici les relations qu'elle fournit :

$$(17) \quad \begin{cases} \sin \theta' \cos \beta + \sin \eta \cos \theta \cos \varepsilon = \cos \eta \sin \theta, \\ \sin \theta' \cos \gamma + \sin \theta \cos \eta \cos \varepsilon = \cos \theta \sin \eta, \\ \sin \theta \cos \varepsilon + \sin \theta' \cos \eta \cos \gamma = \cos \theta' \sin \eta. \end{cases}$$

5. Dans les conditions du problème actuel, les équations différentielles du mouvement d'un corps solide autour de son centre de gravité, quel que soit d'ailleurs le mouvement de translation de celui-ci, sont

$$(18) \quad \begin{cases} A \frac{dp}{dt} - (B - C) qr = P, \\ B \frac{dq}{dt} - (C - A) rp = Q, \\ C \frac{dr}{dt} - (A - B) pq = R; \end{cases}$$

$$(19) \quad \begin{cases} p = \sin \Phi \sin \theta \frac{d\psi}{dt} - \cos \Phi \frac{d\theta}{dt}, \\ q = \cos \Phi \sin \theta \frac{d\psi}{dt} + \sin \Phi \frac{d\theta}{dt}, \\ r = \frac{d\Phi}{dt} - \cos \theta \frac{d\psi}{dt}; \end{cases}$$

A, B, C désignant les moments d'inertie autour des axes principaux des x_1, y_1, z_1 qui se coupent au centre de gravité; p, q, r les composantes de la vitesse angulaire de rotation par rapport aux mêmes axes; et P, Q, R les moments des forces extérieures par rapport à ces mêmes axes.

Mouvement du tore. Le tore étant de révolution autour de l'axe des z_1 , les moments d'inertie autour des deux autres axes sont égaux; on a ainsi

$$(20) \quad B = A.$$

Quant aux moments des forces qui le sollicitent, on observera d'abord que la pesanteur doit être éliminée, puisque la force qui en résulte passe par le centre des moments. Le tore reçoit de l'anneau des actions dont nous désignerons par μ le moment résultant. Si nous négligeons le frottement et que nous admettions une parfaite symétrie autour de l'axe du tore, il s'ensuivra que les actions exercées parallèlement à l'axe sur les pivots se réduiront à une force dont la direction passe par l'axe de figure et ne donne lieu à aucun moment. En négligeant aussi la résistance de l'air, il restera des actions normales aux surfaces des tourillons; et la direction de ces forces passera par l'axe de figure. L'axe du moment résultant μ est donc situé dans le plan de l'équateur du tore. Soit λ l'angle de cet axe avec l'axe des x_1 , compté dans le sens de x_1 à y_1 , il viendra

$$(21) \quad \begin{cases} P = \mu \cos \lambda, \\ Q = \mu \sin \lambda, \\ R = \mu \cos(\mu, z_1) = 0. \end{cases}$$

Cette dernière valeur jointe à la relation (20) réduit la troisième équation (18) à

$$\frac{dr}{dt} = 0;$$

d'où, en désignant par n une constante,

$$(22) \quad r = n.$$

En vertu de ce qui vient d'être établi, les deux premières équations (18) deviennent

$$(23) \quad \left\{ \begin{array}{l} A \frac{dp}{dt} + (C - A) nq = \mu \cos \lambda, \\ A \frac{dq}{dt} - (C - A) np = \mu \sin \lambda. \end{array} \right.$$

Mouvement de l'anneau. Les équations de ce mouvement s'écriront en ajoutant un accent à toutes les quantités qui entrent dans les équations (18) et (19), à l'exception du temps t . On pourrait établir la condition d'égalité des moments d'inertie B' et C' [*fig.* 1]; mais il n'en résulterait pas de réduction sensible dans l'équation finale. D'ailleurs il pourra arriver que la nécessité d'annexer quelques masses lorsqu'il s'agira de réaliser l'appareil, conduise à des moments B' et C' inégaux. Nous aurons d'abord

$$(24) \quad \left\{ \begin{array}{l} A' \frac{dp'}{dt} - (B' - C') q' r' = P', \\ B' \frac{dq'}{dt} - (C' - A') r' p' = Q', \\ C' \frac{dr'}{dt} - (A' - B') p' q' = R'; \end{array} \right.$$

puis, à cause de $\theta' = \text{constante}$, les équations (19) donneront

$$\begin{aligned} p' &= \sin \Phi' \sin \theta' \frac{d\psi'}{dt}, \\ q' &= \cos \Phi' \sin \theta' \frac{d\psi'}{dt}, \\ r' &= \frac{d\Phi'}{dt} - \cos \theta' \frac{d\psi'}{dt}. \end{aligned}$$

Mais, en vertu de (10) et (1), il vient

$$(25) \quad \frac{d\psi'}{dt} = -\omega,$$

et nous avons d'ailleurs, équation (11)

$$\gamma = \Phi';$$

il s'ensuit

$$(26) \quad \begin{cases} p' = -\omega \sin \theta' \sin \gamma, \\ q' = -\omega \sin \theta' \cos \gamma, \\ r' = \frac{d\gamma}{dt} + \omega \cos \theta'; \end{cases}$$

on en tire

$$(27) \quad \begin{cases} \frac{dp'}{dt} = -\omega \sin \theta' \cos \gamma \frac{d\gamma}{dt}, \\ \frac{dq'}{dt} = +\omega \sin \theta' \sin \gamma \frac{d\gamma}{dt}, \\ \frac{dr'}{dt} = \frac{d^2\gamma}{dt^2}. \end{cases}$$

Enfin, les moments des forces que reçoit l'anneau sont :
 1° ceux des forces égales et opposées à celles qu'il exerce sur le tore; 2° les moments des forces que les supports exercent sur l'axe de l'anneau lui-même. Nous trouverons, en raisonnant comme tout à l'heure, que ces derniers se réduisent à un moment μ' , dont l'axe est situé dans le plan de l'équateur de l'anneau et fait un angle λ' avec l'axe des x' , compté de celui-ci vers y' . Il vient donc

$$\begin{aligned} P' &= -P \cos(x_i, x'_i) - Q \cos(y_i, x'_i) + \mu' \cos \lambda', \\ Q' &= -P \cos(x_i, y'_i) - Q \cos(y_i, y'_i) + \mu' \sin \lambda', \\ R' &= -P \cos(x_i, z'_i) - Q \cos(y_i, z'_i), \end{aligned}$$

ou, en vertu des relations (2) à (8) et ayant égard aux

valeurs de P et de Q,

$$\begin{aligned} P' &= -\mu \cos \lambda \sin \alpha & \rightarrow & \mu \sin \lambda \cos \alpha & + \mu' \cos \lambda', \\ Q' &= +\mu \cos \lambda \cos \alpha \cos \eta & - & \mu \sin \lambda \sin \alpha \cos \eta & + \mu' \sin \lambda', \\ R' &= +\mu \cos \lambda \cos \alpha \sin \eta & - & \mu \sin \lambda \sin \alpha \sin \eta. \end{aligned}$$

Substituant ces valeurs et les précédentes (26) et (27) dans les équations (24), il vient

$$\begin{aligned} -A' \omega \sin \theta' \cos \gamma \frac{d\gamma}{dt} + (B' - C') \omega \sin \theta' \cos \gamma \left(\frac{d\gamma}{dt} + \omega \cos \theta' \right) &= -\mu \sin(\alpha + \lambda) + \mu' \cos \lambda', \\ +B' \omega \sin \theta' \sin \gamma \frac{d\gamma}{dt} + (C' - A') \omega \sin \theta' \sin \gamma \left(\frac{d\gamma}{dt} + \omega \cos \theta' \right) &= \mu \cos \eta \cos(\alpha + \lambda) + \mu' \sin \lambda', \\ (28) \quad + C' \frac{d^2 \gamma}{dt^2} - (A' - B') \omega^2 \sin^2 \theta' \sin \gamma \cos \gamma &= \mu \sin \eta \cos(\alpha + \lambda). \end{aligned}$$

Les deux premières de ces équations peuvent s'écrire

$$(29) \quad \left\{ \begin{aligned} \mu' \sin \lambda' &= \omega \sin \theta' \sin \gamma \left\{ \begin{aligned} (B' + C' - A') \frac{d\gamma}{dt} \\ + (C' - A') \omega \cos \theta' \end{aligned} \right\} - \mu \cos \eta \cos(\alpha + \lambda), \\ \mu' \cos \lambda' &= \omega \sin \theta' \cos \gamma \left\{ \begin{aligned} (B' - C' - A') \frac{d\gamma}{dt} \\ + (B' - C') \omega \cos \theta' \end{aligned} \right\} + \mu \sin(\alpha + \lambda). \end{aligned} \right.$$

Elles serviront à déterminer μ' et λ' lorsque tout ce qui se rapporte au mouvement du tore sera connu.

6. *Mouvement du système des deux corps.* Multiplions la première équation (23) par $\cos \alpha$, la deuxième par $\sin \alpha$ et retranchons, il viendra

$$(30) \quad A \left(\cos \alpha \frac{dp}{dt} - \sin \alpha \frac{dq}{dt} \right) + (C - A) n (q \cos \alpha + p \sin \alpha) = \mu \cos(\alpha + \lambda);$$

on aurait semblablement

$$(31) \quad A \left(\sin \alpha \frac{dp}{dt} + \cos \alpha \frac{dq}{dt} \right) + (C - A) n (q \sin \alpha - p \cos \alpha) = \mu \sin(\alpha + \lambda).$$

Ces équations seraient propres à donner μ et $\alpha + \lambda$ en fonction des autres quantités supposées connues. La

première pourrait aussi nous servir à former l'équation principale du problème. En effet, l'équation (30) étant multipliée par $\sin \eta$ et retranchée de l'équation (28), il vient

$$(32) \quad \left\{ \begin{array}{l} C' \frac{d^2 \gamma}{dt^2} - (A' - B') \omega^2 \sin^2 \theta' \sin \gamma \cos \gamma \\ + A \sin \eta \left(\sin^2 \alpha \frac{dq}{dt} - \cos \alpha \frac{dp}{dt} \right) \\ - (C - A) \sin \eta n (q \cos \alpha + p \sin \alpha) = 0. \end{array} \right.$$

Telle est l'équation qu'il s'agirait de traiter à l'effet d'en éliminer toutes les variables et dérivées de variables autres que γ ; mais, pour plus de symétrie, nous procéderons un peu différemment.

A l'aide des valeurs (19) nous formerons d'abord les combinaisons suivantes que contiennent les équations (30) (31) et (32) :

$$\begin{aligned} q \cos \alpha + p \sin \alpha &= + \cos (\Phi - \alpha) \sin \theta \frac{d\psi}{dt} + \sin (\Phi - \alpha) \frac{d\theta}{dt}, \\ q \sin \alpha - p \cos \alpha &= - \sin (\Phi - \alpha) \sin \theta \frac{d\psi}{dt} + \cos (\Phi - \alpha) \frac{d\theta}{dt}. \end{aligned}$$

Or nous avons trouvé (9)

$$\Phi - \alpha = 90^\circ - \epsilon,$$

il s'ensuit

$$(33) \quad \left\{ \begin{array}{l} q \cos \alpha + p \sin \alpha = + \sin \epsilon \sin \theta \frac{d\psi}{dt} + \cos \epsilon \frac{d\theta}{dt}, \\ q \sin \alpha - p \cos \alpha = - \cos \epsilon \sin \theta \frac{d\psi}{dt} + \sin \epsilon \frac{d\theta}{dt}. \end{array} \right.$$

En vertu de (12) et (1), la valeur de $\frac{d\psi}{dt}$ est

$$(34) \quad \frac{d\psi}{dt} = \frac{d\beta}{dt} - \omega :$$

pour obtenir celle de $\frac{d\beta}{dt}$, nous aurons recours à la première équation (14) et à la troisième équation (15), que nous écrirons comme il suit :

$$\begin{aligned}\sin \theta \sin \beta &= \sin \eta \sin \gamma, \\ \sin \theta \cos \beta &= \frac{\cos \eta}{\sin \theta'} - \cot \theta' \cos \theta.\end{aligned}$$

En les différentiant, il vient

$$\begin{aligned}+ \cos \beta \sin \theta \frac{d\beta}{dt} + \sin \beta \cos \theta \frac{d\theta}{dt} &= \sin \eta \cos \gamma \frac{d\gamma}{dt}, \\ - \sin \beta \sin \theta \frac{d\beta}{dt} + \cos \beta \cos \theta \frac{d\theta}{dt} &= \cot \theta' \sin \theta \frac{d\theta}{dt};\end{aligned}$$

multipliant la première par $\cos \beta$, la seconde par $-\sin \beta$, et ajoutant, on trouve

$$\sin \theta \frac{d\beta}{dt} = \sin \eta \cos \beta \cos \gamma \frac{d\gamma}{dt} - \cot \theta' \sin \beta \sin \theta \frac{d\theta}{dt}.$$

On obtiendrait semblablement une relation entre $d\theta$ et $d\gamma$, mais il sera plus simple d'employer la première équation (15)

$$\cos \theta = \cos \eta \cos \theta' + \sin \eta \sin \theta' \cos \gamma;$$

elle donne directement

$$(35) \quad \sin \theta \frac{d\theta}{dt} = \sin \eta \sin \theta' \sin \gamma \frac{d\gamma}{dt},$$

et il vient, en substituant cette valeur dans celle de $\sin \theta \frac{d\beta}{dt}$,

$$\sin \theta \frac{d\beta}{dt} = \sin \eta (\cos \beta \cos \gamma - \sin \beta \sin \gamma \cos \theta') \frac{d\gamma}{dt},$$

ou, en vertu de la deuxième équation (16),

$$(36) \quad \sin \theta \frac{d\beta}{dt} = -\sin \eta \cos \varepsilon \frac{d\gamma}{dt}.$$

Portant les valeurs (34), (35) et (36) dans les équations

tions (33), il vient

$$q \cos \alpha + p \sin \alpha = -\omega \sin \theta \sin \varepsilon - \frac{\sin \eta \cos \varepsilon}{\sin \theta} (\sin \varepsilon \sin \theta - \sin \theta' \sin \gamma) \frac{d\gamma}{dt},$$

$$q \sin \alpha - p \cos \alpha = +\omega \sin \theta \cos \varepsilon + \sin \eta \left(\cos^2 \varepsilon + \sin \varepsilon \frac{\sin \theta' \sin \gamma}{\sin \theta} \right) \frac{d\gamma}{dt},$$

valeurs qui, en vertu de la deuxième équation (14), se réduisent à

$$(37) \quad \begin{cases} q \cos \alpha + p \sin \alpha = -\omega \sin \theta \sin \varepsilon \\ q \sin \alpha - p \cos \alpha = +\omega \sin \theta \cos \varepsilon + \sin \eta \frac{d\gamma}{dt}. \end{cases}$$

Différentions maintenant ces deux équations, nous aurons

$$(38) \quad \begin{cases} \cos \alpha \frac{dq}{dt} + \sin \alpha \frac{dp}{dt} - (q \sin \alpha - p \cos \alpha) \frac{d\alpha}{dt} = -\omega \frac{d \sin \theta \sin \varepsilon}{dt}, \\ \sin \alpha \frac{dq}{dt} - \cos \alpha \frac{dp}{dt} + (q \cos \alpha + p \sin \alpha) \frac{d\alpha}{dt} = +\omega \frac{d \sin \theta \cos \varepsilon}{dt} + \sin \eta \frac{d\gamma}{dt}. \end{cases}$$

Les deuxièmes équations (14) et (15) donnent d'ailleurs

$$\sin \theta \sin \varepsilon = \sin \theta' \sin \gamma,$$

$$\sin \theta \cos \varepsilon = \frac{\cos \theta'}{\sin \eta} - \cot \eta \cos \theta,$$

d'où

$$(39) \quad \begin{cases} \frac{d \sin \theta \sin \varepsilon}{dt} = +\cos \varepsilon \sin \theta \frac{d\varepsilon}{dt} + \sin \varepsilon \cos \theta \frac{d\theta}{dt} \\ \quad \quad \quad = \sin \theta' \cos \gamma \frac{d\gamma}{dt}, \\ \frac{d \sin \theta \cos \varepsilon}{dt} = -\sin \varepsilon \sin \theta \frac{d\varepsilon}{dt} + \cos \varepsilon \cos \theta \frac{d\theta}{dt} \\ \quad \quad \quad = \cot \eta \sin \theta \frac{d\theta}{dt}. \end{cases}$$

Les mêmes équations vont nous fournir la valeur de $\frac{d\varepsilon}{dt}$ dont nous aurons besoin dans un instant. A cet effet, multiplions la première par $\cos\varepsilon$ et la deuxième par $-\sin\varepsilon$, puis ajoutons, il viendra

$$\sin\theta \frac{d\varepsilon}{dt} = \sin\theta' \cos\gamma \cos\varepsilon \frac{d\gamma}{dt} - \cot\eta \sin\varepsilon \sin\theta \frac{d\theta}{dt},$$

et, en substituant la valeur (35),

$$\sin\theta \frac{d\varepsilon}{dt} = \sin\theta' (\cos\gamma \cos\varepsilon - \sin\gamma \sin\varepsilon \cos\eta) \frac{d\gamma}{dt}.$$

En ayant égard à la première équation (16), cette expression se réduit à

$$(40) \quad \sin\theta \frac{d\varepsilon}{dt} = -\sin\theta' \cos\beta \frac{d\gamma}{dt}.$$

Les expressions (38) contiennent encore la dérivée $\frac{d\alpha}{dt}$ dont il faut calculer l'expression. L'équation (9) donne

$$d\Phi - d\alpha = -d\varepsilon,$$

d'où

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{d\Phi}{dt} + \frac{d\varepsilon}{dt},$$

et, en vertu de la troisième équation (19) et de l'équation (22),

$$\frac{d\alpha}{dt} = n + \cos\theta \frac{d\psi}{dt} + \frac{d\varepsilon}{dt}.$$

Substituant les valeurs précédemment obtenues, il vient

$$\frac{d\alpha}{dt} = n - \omega \cos\theta - \frac{1}{\sin\theta} (\sin\eta \cos\theta \cos\varepsilon + \sin\theta' \cos\beta) \frac{d\gamma}{dt},$$

ou, à cause des premières équations (15) et (17),

$$(41) \begin{cases} \frac{d\alpha}{dt} = n - \omega \cos \theta - \cos \eta \frac{d\gamma}{dt} \\ = n - \omega (\cos \eta \cos \theta' + \sin \eta \sin \theta' \cos \gamma) - \cos \eta \frac{d\gamma}{dt}. \end{cases}$$

Présentons immédiatement une remarque relative à la constante n . Cette quantité n'est pas donnée directement par l'observation, mais l'équation précédente va nous donner le moyen de l'obtenir. Supposons que l'anneau étant en repos relativement à la surface de la Terre et son plan formant avec le plan horaire l'angle γ_0 , on communique au tore une vitesse angulaire relative au plan de l'anneau qui soit w , et qu'on l'abandonne à lui-même en cet état; w sera la valeur initiale de $\frac{d\alpha}{dt}$, et l'équation (41) fournira l'expression suivante de n en fonction de w et γ_0 :

$$(42) \quad n = w + \omega (\cos \eta \cos \theta' + \sin \eta \sin \theta' \cos \gamma_0) = w + \omega \cos \theta_0.$$

Cette relation montre que la vitesse de rotation autour de l'axe du tore est égale à la vitesse relative du tore, l'anneau étant au repos, augmentée de la composante de la vitesse de la Terre autour de l'axe du tore dans le même état de repos de l'anneau.

Revenons aux équations (38). En y substituant les valeurs (39), (35) et (41), on aura

$$\begin{aligned} \cos \alpha \frac{dq}{dt} + \sin \alpha \frac{dp}{dt} &= \left(n - \omega \cos \theta - \cos \eta \frac{d\gamma}{dt} \right) (q \sin \alpha - p \cos \alpha) \\ &\quad - \omega \sin \theta' \cos \gamma \frac{d\gamma}{dt}, \\ \sin \alpha \frac{dq}{dt} - \cos \alpha \frac{dp}{dt} &= - \left(n - \omega \cos \theta - \cos \eta \frac{d\gamma}{dt} \right) (q \cos \alpha + p \sin \alpha) \\ &\quad + \omega \sin \theta' \cos \gamma \sin \alpha \frac{d\gamma}{dt} + \sin \alpha \frac{d\gamma}{dt}. \end{aligned}$$

Au moyen de ces valeurs les équations (30) et (31) donneront

$$\begin{aligned} \mu \sin (\alpha + \lambda) = & \left[Cn - A \left(\omega \cos \theta + \cos \eta \frac{d\gamma}{dt} \right) \right] (q \sin \alpha - p \cos \alpha) \\ & - A \omega \sin \theta' \cos \gamma \frac{d\gamma}{dt}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mu \cos (\alpha + \lambda) = & \left[Cn - A \left(\omega \cos \theta + \cos \eta \frac{d\gamma}{dt} \right) \right] (q \cos \alpha + p \sin \alpha) \\ & - A \omega \sin \theta' \cos \eta \sin \gamma \frac{d\gamma}{dt} - A \sin \eta \frac{d^2 \gamma}{dt^2}; \end{aligned}$$

substituant les valeurs (37), il viendra

$$\begin{aligned} v \sin (\alpha + \lambda) = & + \left[Cn - A \left(\omega \cos \theta + \cos \eta \frac{d\gamma}{dt} \right) \right] \left(\omega \sin \theta \cos \varepsilon + \sin \eta \frac{d\gamma}{dt} \right) \\ & - A \omega \sin \theta' \cos \gamma \frac{d\gamma}{dt}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v \cos (\alpha + \lambda) = & - \left[Cn - A \left(\omega \cos \theta + \cos \eta \frac{d\gamma}{dt} \right) \right] \omega \sin \theta \sin \varepsilon \\ & - A \omega \sin \theta' \cos \eta \sin \gamma \frac{d\gamma}{dt} - A \sin \eta \frac{d^2 \gamma}{dt^2}. \end{aligned}$$

Développant et ordonnant, on aura d'abord

$$\begin{aligned} \mu \sin (\alpha + \lambda) = & + (Cn - A \omega \cos \theta) \omega \sin \theta \cos \varepsilon \\ & + [Cn \sin \eta - A \omega (\sin \eta \cos \theta + \sin \theta' \cos \gamma + \cos \eta \sin \theta \cos \varepsilon)] \frac{d\gamma}{dt} \\ & - A \sin \eta \cos \eta \frac{d\gamma^2}{dt^2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v \cos (\alpha + \lambda) = & - (Cn - A \omega \cos \theta) \omega \sin \theta \sin \varepsilon \\ & + A \omega \cos \theta' \sin \theta \sin \varepsilon - \sin \theta' \sin \gamma) \frac{d\gamma}{dt} - A \sin \eta \frac{d^2 \gamma}{dt^2}. \end{aligned}$$

En ayant égard aux relations du n^o 4, ces équations se réduisent à

$$(43) \left\{ \begin{array}{l} \mu \sin(\alpha + \lambda) = + (Cn - A\omega \cos \theta) \omega \sin \theta \cos \varepsilon \\ \qquad \qquad \qquad + (Cn - 2A\omega \cos \theta) \sin \eta \frac{d\gamma}{dt} - A \sin \eta \cos \eta \frac{d^2\gamma}{dt^2}, \\ \mu \cos(\alpha + \lambda) = - (Cn - A\omega \cos \theta) \omega \sin \theta' \sin \gamma - A \sin \eta \frac{d^2\gamma}{dt^2}. \end{array} \right.$$

Si l'on remplace ici $\cos \theta$ par sa valeur (15) et $\sin \theta \cos \varepsilon$ par sa valeur

$$(44) \quad \sin \theta \cos \varepsilon = \cos \theta' \sin \eta - \sin \theta' \cos \eta \cos \gamma$$

tirée de la troisième équation (17), les formules (43) donneront μ et $\alpha + \lambda$ en fonction de γ et de ses deux premières dérivées.

7. *Formation de l'équation finale.* Eliminons la quantité $\mu \cos(\alpha + \lambda)$ entre la deuxième équation (43) et l'équation (28), il viendra

$$(A \sin^2 \eta + C') \frac{d^2\gamma}{dt^2} + (Cn - A\omega \cos \theta) \omega \sin \theta' \sin \eta \sin \gamma \\ - (A' - B') \omega^2 \sin^2 \theta' \sin \gamma \cos \gamma = 0,$$

puis, en mettant pour $\cos \lambda$ sa valeur (15) et transposant,

$$(44 \text{ bis}) \left\{ \begin{array}{l} (A \sin^2 \eta + C') \frac{d^2\gamma}{dt^2} = - (Cn - A \cos \eta \omega \cos \theta') \omega \sin \theta' \sin \eta \sin \gamma \\ \qquad \qquad \qquad + (A \sin^2 \eta + A' - B') \omega^2 \sin^2 \theta' \sin \gamma \cos \gamma. \end{array} \right.$$

Soient, pour abrégér,

$$\frac{g}{a} = \frac{Cn - A \cos \eta \omega \cos \theta'}{A \sin^2 \eta + C'} \omega \sin \theta' \sin \eta, \\ 2 \delta \cdot \frac{g}{a} = \frac{A \sin^2 \eta + A' - B}{A \sin^2 \eta + C} \omega \sin^2 \theta',$$

g désignant l'intensité de la pesanteur et δ un nombre abstrait qui sera toujours extrêmement petit, tant que, A' et B' étant supposés inégaux, $\sin \eta$ ne sera pas lui-même très-petit; l'équation précédente deviendra

$$(45) \quad \frac{d^2 \gamma}{dt^2} = \frac{g}{a} (-\sin \gamma + 2 \delta \sin \gamma \cos \gamma),$$

et l'on aura en même temps

$$(46) \quad \begin{cases} a = \frac{g}{\omega \sin \theta' \sin \eta} \cdot \frac{A \sin^2 \eta + C'}{Cn - A \cos \eta \omega \cos \theta'}, \\ \delta = \frac{1}{2} \frac{\omega \sin \theta'}{\sin \eta} \cdot \frac{A \sin^2 \eta + A' - B'}{Cn - A \cos \eta \omega \cos \theta'}. \end{cases}$$

L'équation (45) étant multipliée par $2 d\gamma$ s'intègre immédiatement. Soit donc $\pm \gamma_0$ la valeur réelle ou imaginaire de γ pour laquelle $\frac{d\gamma}{dt}$ est nul, il vient

$$\frac{d\gamma^2}{dt^2} = \frac{2g}{a} [\cos \gamma - \cos \gamma_0 - \delta (\cos^2 \gamma - \cos^2 \gamma_0)],$$

d'où

$$(47) \quad \frac{d\gamma}{dt} = \pm \sqrt{\frac{2g}{a} (\cos \gamma - \cos \gamma_0) [1 - \delta (\cos \gamma + \cos \gamma_0)]}.$$

Le cas où la valeur de γ serait imaginaire pour une valeur nulle de $\frac{d\gamma}{dt}$, est celui où l'anneau, au lieu d'être abandonné à lui-même à partir du repos, serait animé d'une vitesse capable de lui faire décrire un arc plus grand qu'une circonférence. Dans ce cas, que nous n'examinerons pas, $\cos \gamma_0$ pourrait encore être une quantité réelle, mais elle sortirait des limites ± 1 entre lesquelles sont compris les cosinus. Au reste, on obtiendrait la valeur de cette quantité en mettant dans l'équation précédente un système de valeurs simultanées de γ et de $\frac{d\gamma}{dt}$.

Ce cas étant exclu, γ_0 sera un angle réel, et à cause que δ est très-petit, le facteur $1 - \delta (\cos \gamma + \cos \gamma_0)$ sera constamment positif. Ceci posé, on voit que la seule condition pour que $\frac{d\gamma}{dt}$ soit une quantité réelle est que le facteur $\cos \gamma - \cos \gamma_0$ et la constante a soient de même signe. Or les angles θ' et η étant supposés compris entre 0 et 180 degrés, et le terme $A \cos \eta \omega \cos \theta'$ très-petit par rapport à Cn , le signe de a sera celui de n . Lors donc que la composante n du mouvement de rotation autour de l'axe de figure du tore sera positive, on devra avoir

$$\cos \gamma > \cos \gamma_0;$$

les valeurs de γ se succéderont dans l'ordre

$$\gamma_0, 0, -\gamma_0, 0, +\gamma_0, 0, \dots$$

Si le mouvement de rotation a lieu dans le sens contraire, ou bien si la constante n est négative, on aura nécessairement

$$\cos \gamma < \cos \gamma_0;$$

et les valeurs de γ se succéderont comme il suit :

$$\gamma_0, \pi, \pi + \gamma_0, \pi, \gamma_0, \pi, \pi + \gamma_0, \dots$$

La valeur absolue de $\frac{d\gamma}{dt}$ est la même pour deux valeurs égales et de signes contraires de γ ; il suit de là, et de ce qui vient d'être dit, que le mouvement du plan de l'anneau est un mouvement oscillatoire autour du plan horaire, et que les vitesses angulaires sont égales dans les positions symétriques par rapport à ce plan. Il en résulte également que si un arc d'une amplitude donnée est décrit par le gyroscope dans le cas de n positif, l'arc qui sera décrit lorsqu'on changera le sens de la vitesse de rotation en

conservant le même point de départ, sera la portion restante de la circonférence. Enfin, si l'on néglige le terme en δ dans l'équation (47), on voit que cette expression coïncide avec l'équation différentielle du mouvement du pendule plan de longueur a . Le mouvement du plan de l'anneau autour du plan horaire suivra, dans ce cas, les mêmes lois que le mouvement du pendule autour de la verticale. (Ce résultat a été indiqué par plusieurs auteurs.) La première équation (46) donne d'ailleurs la longueur du pendule simple qui accomplirait des oscillations de même amplitude dans le même temps.

On pourrait éviter de considérer le double cas relatif à n en regardant n comme une quantité toujours positive; mais alors, il faudrait, dans le cas du changement de sens de la rotation du tore, substituer au pôle z_1 son opposé, et changer aussi le sens de l'un des axes mobiles x_1 ou γ_1 , afin que les axes mobiles restassent superposables, comme il a été dit au n° 2. Il nous paraît préférable, quoique ce soit un peu plus long, de considérer séparément ces deux cas.

La suite prochainement.