ERNEST DE JONQUIÈRES

Solution de la question 306

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 14 (1855), p. 318-320

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1855_1_14__318_0>

SOLUTION DE LA QUESTION 306

(voir page 211),

PAR M. ERNEST DE JONQUIÈRES,
Lieutenant de vaisseau.

Appelons, pour abréger, *rayons pivotants* les rayons tels que Sa_p et *rayons tangentiels* les tangentes issues des points b_p. Soient E le point de concours des côtés AC, BD; i le point où AB rencontre la transversale L; k, l, m les points où L est coupée par les autres côtés AC, DB, CD du quadrilatère ABDC; enfin, soient e, f les points doubles des deux divisions homographiques a_p, etc., b_p, etc.

La courbe passe par le point S; car si l'on regarde le côté S$\mathrm{B}i$ comme étant un *rayon tangentiel,* le *rayon pivotant* Si' qui lui correspond, quel qu'il soit, le coupe au point S.

Pour tout autre rayon pivotant Sa_p, on a une origine b_p différente de i, et cette origine donne lieu à deux tangentes (réelles ou imaginaires) qui déterminent toujours deux points de la courbe sur le rayon Sa_p, sans compter le point S qui s'y trouve déjà. La courbe est donc du troisième degré, puisque toute transversale issue du point S la coupe en trois points (*).

Prenons la droite SC pour rayon pivotant. La conique à décrire est assujettie à toucher à la fois les trois droites CA, CS, CD qui concourent au même point C et les deux droites BA, BD. Or, il n'y a que la droite CD, ellipse infiniment aplatie, qui satisfasse à la question. Les rayons tangentiels passent dans ce cas par les extrémités C et D de cette droite. Donc le point C appartient à la courbe.

(*) Il reste à démontrer que le point S n'est pas un point multiple. TM.

Mêmes raisonnements pour les points E et D.

Il est évident que la courbe passe aussi une seule fois par chacun des points doubles e, f. Cherchons le troisième point d'intersection de la courbe et de la transversale L; ce point est unique. Pour le déterminer, inscrivons une conique dans le pentagone formé par le quadrilatère donné et par la transversale; puis menons par le point S (au moyen du théorème de M. Brianchon) la tangente Sa_p à cette conique. Si l'on regarde cette tangente comme étant le rayon pivotant actuel, L sera l'un des rayons tangentiels conjugués. Donc le point a_p où la tangente Sa_p coupe L, est le troisième point cherché.

Nous avons déjà deux points de la courbe sur chacun des côtés ACk, CDm, DBl, savoir : C et E sur AC, C et D sur CD, D et E sur DB. Pour obtenir les troisièmes points d'intersection respectifs, traçons les rayons pivotants conjugués respectivement Sk', Sm', Sl'. Les rayons couperont les côtés correspondants en des points qui sont les points cherchés.

Voilà donc neuf points de la courbe déterminés sans tracer aucune conique. On peut ensuite achever la construction en employant le procédé indiqué par M. Chasles dans les *Comptes rendus* du 30 mai 1853, mais rien n'empêche d'effectuer la construction même de l'énoncé qui n'exige pas davantage le tracé des coniques. En effet, pour chacune d'elles, le problème à résoudre se réduit à mener par un point deux tangentes à une conique déterminée par cinq tangentes données. Prenons quatre de celles-ci; elles forment un quadrilatère et les tangentes cherchées forment un faisceau en involution avec les quatre rayons qui joignent le point donné aux quatre sommets de ce quadrilatère (*Géométrie supér.*, p. 667).

Formons un autre quadrilatère avec quatre autres tangentes prises dans les cinq qui sont données, les tangentes cherchées sont aussi en involution avec les rayons qui aboutissent aux sommets de ce second quadrilatère. Coupant toutes les lignes de la figure par une transversale arbitraire, le problème est ramené à celui du n° 271 de la *Géométrie supérieure*.

Ainsi la question est complétement résolue. Remarquons, chemin faisant, que le faisceau des coniques est homographique avec la division de points que leurs centres déterminent sur la droite qui les contient tous, et, plus généralement, avec la division de points formée par les pôles d'une droite quelconque du plan de la figure pris relativement à ces coniques.

Le théorème 306 donne lieu au suivant :

THÉORÈME. *On donne dans un plan:* 1° *quatre points* 1, 2, 3, 4; 2° *une droite* L *passant par l'un de ces points,* 1 *par exemple, et deux divisions homographiques* m, n, etc., m′, n′, *etc., sur cette droite;* 3° *un point quelconque* O *hors de la droite. Par un point variable* m *de la première division et les quatre points* 1, 2, 3, 4, *on fait passer une conique et l'on joint le point* O *au point* m′, *conjugué de* m, *par un rayon* Om′ *qui coupe la conique en deux points* α, β; *enfin on joint le point* m *à ces deux points. Toutes les droites telles que* mα, mβ *enveloppent une courbe de troisième classe qui touche la droite* L, *les côtés* 2-3, 3-4 *du quadrilatère* 1, 2, 3, 4, *sa diagonale* 2-4 *ainsi que les deux rayons* Oe, Of *qui joignent le point* O *aux points doubles des deux divisions homographiques tracées sur* L.

La loi de *dualité* dispense de prouver ce second théorème. La démonstration est corrélative de la précédente et donne lieu aux mêmes considérations.