

PAUL VOLPICELLI

**Deux théorèmes relatifs à la partition  
des nombres**

*Nouvelles annales de mathématiques 1<sup>re</sup> série*, tome 14  
(1855), p. 314-317

[http://www.numdam.org/item?id=NAM\\_1855\\_1\\_14\\_\\_314\\_1](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1855_1_14__314_1)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1855, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

---

**DEUX THÉORÈMES**  
**RELATIFS A LA PARTITION DES NOMBRES;**  
**PAR M. PAUL VOLPICELLI.**

---

*Lemme.* Soit

$$c = 2^\mu h_1^\alpha h_2^\beta \dots h_k^\tau,$$

où  $\mu, \alpha, \beta, \dots, \tau$  représentent des entiers, et  $h_1, h_2, h_3, \dots, h_k$  expriment des nombres premiers. En posant

$$H = (\alpha + 1)(\beta + 1) \dots (\tau + 1),$$

les nombres  $\omega_1, \omega_2$  des solutions entières de l'équation

$$x^2 - y^2 = c$$

sont représentés par les équations

$$(1) \quad \begin{cases} \omega_1 = \frac{(-1)^{\frac{\mu}{2}} (\mu - 1) H}{2}, \\ \omega_2 = \frac{(-1)^{\frac{\mu}{2}} (\mu - 1) H - 1}{2}. \end{cases}$$

La première de ces formules se rapporte au cas dans lequel au moins un des exposants  $\mu, \alpha, \beta, \dots, \tau$  est impair, et la seconde n'est applicable que quand les mêmes exposants sont tous pairs. Dans le cas de

$$\alpha = \beta = \dots = \tau = 0,$$

$\mu$  devra être impair dans la première et pair  $> 2$  dans la seconde. En faisant

$$\alpha = \beta = \dots = \tau = 1,$$

on aura de la première, par corollaire,

$$\omega_1 = 2^{k-1},$$

formule déjà donnée par Legendre (\*) et par Poinso (\*)  
En outre, en supposant que  $h_1, h_2, \dots, h_k$  soient tous nombres premiers de la forme  $4m + 1$ , le nombre des solutions entières de l'équation

$$x_1^2 + y_1^2 = c$$

est exprimé par les équations

$$(2) \quad \gamma = \frac{1}{2} H, \quad \gamma' = \frac{1}{2} (H + 1), \quad \gamma'' = \frac{1}{2} (H - 1).$$

(\*) *Théorie des nombres*; t. I, p. 8; Paris, 1830.

(\*\*) *Comptes rendus*; t. XXVIII, p. 582; mai 1849.

La première de ces formules est applicable quand, quel que soit  $\mu$ , un au moins des exposants  $\alpha, \beta, \dots, \tau$ , est impair; la deuxième quand,  $\mu$  étant impair, les mêmes exposants sont tous pairs; la troisième quand,  $\mu$  étant pair ou zéro, tous les autres exposants sont pairs (\*).

**THÉORÈME I.** *Tout nombre  $c$ , excepté le double d'un impair, est autant de fois représenté par la somme de  $x - y$  nombres impairs consécutifs, en commençant par  $2y + 1$  et en terminant par  $2x - 1$ , qu'il y a de solutions entières pour l'équation*

$$x^2 - y^2 = c,$$

le nombre desquelles est donné par les équations (1). Si  $c$  est carré, il y aura de plus la décomposition suivante :

$$c = 1 + 3 + 5 + \dots + 2\sqrt{c} - 1.$$

*Exemple :* Qu'on ait

$$x^2 - y^2 = 72 = 2^3 \cdot 3^2,$$

on a

$$\mu = 3, \quad \alpha = 2,$$

et pour cela

$$\omega_1 = 3;$$

donc

$$x = 19, 11, 9; \quad y = 17, 7, 3;$$

d'où

$$\begin{aligned} x - y &= 2, 4, 6, \\ 2y + 1 &= 35, 15, 7, \\ 2x - 1 &= 37, 21, 17; \end{aligned}$$

et enfin

$$72 = \begin{cases} 35 + 37, \\ 15 + 17 + 19 + 21, \\ 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17. \end{cases}$$

---

(\*) *Journal de Mathématiques pures et appliquées* de M. A.-L. Crelle; tome XLIX.

**THÉORÈME II.** *Tout nombre  $c$  qui se décompose en deux carrés  $x_1^2, y_1^2$  est la somme de deux progressions arithmétiques dont la première se forme de  $y_1$  termes, en commençant par 2 et en terminant par  $4y_1 - 2$ , et la seconde de  $x_1 - y_1$  termes, en commençant par  $2y_1 + 1$  et en terminant par  $2x_1 - 1$ . Il y aura pour  $c$  autant de ces décompositions qu'il y a des solutions entières pour l'équation*

$$x_1^2 + y_1^2 = c,$$

dont le nombre est donné par les équations (2). Si  $c$  est carré, il y aura de plus la décomposition

$$c = 1 + 3 + 5 + \dots + 2\sqrt{c} - 1.$$

*Exemple :* Qu'on ait

$$c = 1105 = 17 \cdot 13 \cdot 5,$$

les solutions entières de l'équation

$$x_1^2 + y_1^2 = 1105$$

seront

$$x_1 = 32, 31, 24, 33; \quad y_1 = 9, 12, 23, 4;$$

d'où

$$4y_1 - 2 = 34, 46, 90, 14; \quad 2y_1 + 1 = 19, 25, 47, 9;$$

$$2x_1 - 1 = 63, 61, 47, 65; \quad x_1 - y_1 = 23, 19, 1, 29;$$

et enfin

$$1105 = \begin{cases} 2 + 6 + 10 \dots + 34 + 19 + 21 + \dots + 61 + 63, \\ 2 + 6 + \dots + 46 + 25 + 27 + \dots + 59 + 61, \\ 2 + 6 + \dots + 90 + 47, \\ 2 + 6 + \dots + 14 + 9 + 11 + \dots + 63 + 65. \end{cases}$$