Nouvelles annales de mathématiques

Paul Serret

Note sur le principe de l'homogénéité

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 14 (1855), p. 312-314

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1855_1_14__312_1>

NOTE SUR LE PRINCIPE DE L'HOMOGÉNÉITÉ;

PAR M. PAUL SERRET,
Professeur.

1. THÉORÈME. *Si, laissant indéterminée l'unité de longueur, on représente par les nombres* a, b, c, *etc.*, *les longueurs des différentes lignes* A, B, C, *etc.*, *d'une figure et que l'on trouve entre ces nombres la relation*

$$f(a, b, c, \ldots) = 0,$$

le polynôme f (a, b, c,...) *qui forme le premier membre de cette équation sera homogène.*

Dans la démonstration que l'on donne ordinairement de cette importante proposition, on établit, pour le cas où la relation entre les grandeurs considérées peut s'exprimer algébriquement, que *si le polynôme* f (a, b, c,...) *n'est pas homogène, l'équation*

$$f(a, b, c, \ldots) = 0$$

doit du moins se décomposer en une série d'équations homogènes

$$f_1(a, b, c, \ldots) = 0, \quad f_2(a, b, c, \ldots) = 0, \ldots,$$

ayant lieu séparément, et dont chacune exprimerait par conséquent une propriété particulière de la figure considérée.

Il me paraît fâcheux, toutefois, que l'on ne donne jamais à l'appui de cette singulière démonstration un seul exemple présentant aux élèves cette agréable surprise d'une équation recélant dans son apparente unité, non-seulement la relation déterminée que l'on cherchait à mettre en évidence entre les éléments considérés de la figure, mais encore plusieurs autres relations distinctes de la première, auxquelles le calculateur ne songeait nullement, mais que le *calcul,* beaucoup plus intelligent, ne pouvait omettre.

Malheureusement pour le calcul, l'exemple que l'on néglige de donner est encore à trouver, et le principe de l'homogénéité peut sans inconvénient se passer de son concours.

2. Supposons, en effet, qu'ayant pour objet de trouver une certaine relation *déterminée* existant entre les longueurs des lignes A, B, C, etc., d'une figure, nous prenions d'abord l'une de ces lignes, A par exemple, pour unité de longueur.

Soient 1, b', c', etc., les nombres qui expriment les longueurs des lignes A, B, C, etc., et soit

$$f(1, b', c', \ldots) = 0 \tag{1}$$

la relation trouvée entre ces nombres.

Laissons *en second lieu* l'unité de longueur indéterminée, et soient alors a, b, c, etc., les nombres, indéterminés aussi, qui mesurent les lignes A, B, C, etc.

Le rapport de deux grandeurs étant indépendant de l'unité particulière adoptée pour les mesurer, on aura les relations suivantes :

$$\frac{b'}{1} = \frac{b}{a}, \quad \frac{c'}{1} = \frac{c}{a}, \ldots,$$

ou

$$b' = \frac{b}{a}, \quad c' = \frac{c}{a}, \ldots.$$

Donc, en remplaçant dans l'équation (1) les nombres

b', c', etc., par leurs valeurs, nous aurons la relation générale cherchée

$$(2) \qquad f\left(1, \frac{b}{a}, \frac{c}{a}, \dots\right) = 0;$$

équation homogène de degré zéro, et qui demeurera encore homogène en prenant le degré m si, pour faire disparaître les dénominateurs, on multiplie tous les termes par la plus haute puissance de a, a^m qui entre *algébriquement* en dénominateur.

Remarque. Cette démonstration contient en même temps l'indication de la marche à suivre pour rétablir l'indétermination de l'unité dans une équation quand on a pris d'abord l'une des lignes de la figure pour unité de longeur. Elle s'applique d'ailleurs à toutes les relations possibles entre les éléments de la figure, soit que ces relations puissent s'exprimer algébriquement, soit qu'elles se traduisent par des équations transcendantes, tandis que la démonstration ordinaire, outre les inconvénients signalés plus haut, s'applique seulement au premier cas.