Nouvelles annales de mathématiques

Garlin

Modes de génération des cassinoïdes et des lemniscates

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 14 (1855), p. 305-310

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1855_1_14__305_1>

MODES DE GÉNÉRATION DES CASSINOIDES ET DES LEMNISCATES;

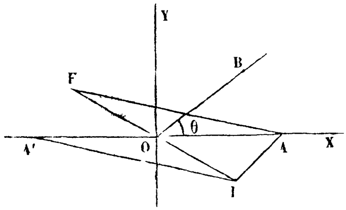
PAR M. GARLIN,
Docteur ès Sciences.

La définition géométrique de la cassinoïde ou ellipse de Cassini est que le produit des distances d'un point quelconque de cette courbe à deux points fixes (qu'on nomme foyers ou pôles) est constant. On sait qu'on a comme cas particulier la lemniscate de Bernoulli ou lemniscate hyperbolique. Je vais indiquer ici quelques moyens nouveaux d'obtenir ces courbes remarquables, dont la discussion complète se trouve dans les Traités de géométrie analytique.

PROBLÈME I. *Le lieu géométrique des foyers des coniques concentriques ayant un diamètre déterminé de grandeur et de position, le diamètre conjugué étant seulement déterminé de grandeur, est une cassinoïde.*

On peut résoudre cette question en se servant de l'équation aux foyers; mais nous nous contenterons de donner la démonstration géométrique suivante :

Prenons le diamètre fixe OA pour axe des abscisses et la perpendiculaire OY pour axe des ordonnées. Soit OB la position de l'autre diamètre correspondant à une valeur particulière de l'inclinaison variable θ. Si F est un



point du lieu, le point F', symétrique par rapport à l'origine, en est aussi un; donc les coordonnées des points F et F' sont égales et de signe contraire, et l'origine des coordonnées est un centre du lieu cherché. Représentons comme à l'ordinaire par a' et b' les deux demi-diamètres conjugués, par a et b les demi-axes de la conique dont F et F' sont les foyers; x et y étant les coordonnées constantes, on a, pour le carré de la demi-excentricité,

$$x^2 + y^2 = a^2 - b^2. \tag{1}$$

Mais, d'après un des théorèmes d'Apollonius sur les diamètres conjugués, on a

$$a^2 + b^2 = a'^2 + b'^2. \tag{2}$$

Enfin, le point A appartenant à la conique que nous supposerons être une ellipse, on a la relation

$$\mathrm{AF} + \mathrm{AF'} = 2a.$$

Je dis maintenant que le produit FA.FA' ou FA.F'A (puisque FA' = F'A) est constant. En effet, élevant la dernière relation au carré, il vient

$$\overline{\mathrm{AF}}^2 + \overline{\mathrm{AF'}}^2 + 2\,\mathrm{AF}.\mathrm{AF'} = 4a^2. \tag{3}$$

Or la figure donne

$$\overline{\mathrm{AF}}^2 = (a' - x)^2 + y^2, \quad \overline{\mathrm{AF'}}^2 = (a' + x)^2 + y^2,$$

d'ailleurs, d'après les équations (1) et (2);

$$2a^2 = a'^2 + b'^2 + x^2 + y^2;$$

par suite, l'équation (3) se réduit à

$$\mathrm{AF}.\mathrm{AF}' = b'^2.$$

Ainsi on a bien une cassinoïde dont les pôles sont les extrémités du diamètre fixe, et dont le produit constant correspondant est le carré du demi-diamètre conjugué.

En écrivant la dernière équation en coordonnées rectangles, on voit immédiatement que quand les deux diamètres conjugués sont égaux, la cassinoïde se transforme dans la lemniscate de Bernoulli.

Remarque. Les triangles tels que AFF′ ont la médiane AO constante de grandeur et de position, et le produit des deux côtés adjacents AF.AF′ est constant. Il résulte de là la génération suivante des cassinoïdes:

THÉORÈME. *Les sommets des angles à la base des triangles dont la médiane correspondante est constante de grandeur et de position, et dont le produit des deux autres côtés est invariable, décrivent des ellipses de Cassini.*

Si la médiane est moyenne proportionnelle entre les côtés adjacents, les courbes décrites sont des lemniscates.

PROBLÈME II. *Trouver le lieu géométrique des foyers et des sommets des cassinoïdes concentriques de module donné et assujetties à passer par un même point.*

L'équation de la cassinoïde, dans les deux systèmes de coordonnées le plus fréquemment employés, affecte les deux formes

(1) $$(x^2 + y^2)^2 - 2a^2(x^2 - y^2) + a^4 = b^4,$$

(2) $$r^4 - 2a^2 \cos 2\theta . r^2 + a^4 = b^4;$$

$2a$ est la distance des deux points fixes et b^2 est le produit constant des distances d'un point quelconque de la courbe à ces deux points.

On appelle *module* le rapport $\frac{b}{a}=k$; on le suppose ici donné. Remplaçant b par sa valeur ak, l'équation (1) s'écrit

$$(3)\qquad (x^2+y^2)^2-2a^2(x^2-y^2)+a^4(1-k^4)=0.$$

On prend pour OX la ligne joignant le centre commun au point donné, lequel est à une distance d de ce centre, et pour OY la perpendiculaire menée par ce centre. En faisant varier le paramètre a, dans (3), on obtient une infinité de courbes. Soit maintenant OX′ faisant avec OX l'angle α, le grand axe d'une courbe quelconque du système. On a l'équation (3) pour l'équation de cette courbe rapportée à OX′ et OY′, le paramètre a ayant une valeur déterminée. Si l'on voulait dans cette équation remplacer a par α, il suffirait d'exprimer qu'elle est satisfaite par les valeurs

$$x=d\cos\alpha,\quad y=-d\sin\alpha,$$

ce qui donne

$$(4)\qquad d^4-2a^2d^2\cos2\alpha+a^4(1-k^4)=0.$$

Si l'on éliminait a entre (3) et (4), on aurait l'équation générale des courbes du système par rapport aux axes mobiles OX′ et OY′.

Pour avoir l'équation du lieu des foyers, il suffit dans (4) de remplacer a par r, ce qui donne pour l'équation polaire du lieu

$$r^4-\frac{2d^2}{1-k^4}\cos2\alpha.r^2+\frac{d^4}{1-k^4}=0.$$

Cette équation a la même forme que l'équation (2). Cherchons dans quels cas on peut identifier ces équations; on doit avoir

$$a^2=\frac{d^2}{1-k^4},\quad b^2=\frac{d^2k^2}{1-k^4}.$$

Ces deux conditions déterminent les deux éléments a et b; pour qu'ils soient réels, il faut qu'on ait $k < 1$.

Il est à remarquer que le module du lieu des foyers est le même que pour les courbes du système, car

$$\frac{b^2}{a^2} = k^2.$$

Dans l'hypothèse particulière $k = 1$, auquel cas les courbes du système sont des lemniscates, l'équation du lieu des foyers devient

$$r^2 = \frac{d^2}{2\cos 2\alpha}$$

ou

$$y^2 - x^2 = -\frac{d^2}{2}.$$

Elle représente des hyperboles équilatères dont les asymptotes sont les bissectrices des angles des axes et dont le demi-axe transverse est $\frac{d}{\sqrt{2}}$.

L'équation du lieu des sommets se déduit sans peine de celle que nous avons trouvée pour les foyers. En effet, si ρ désigne le rayon vecteur d'un sommet, on a, comme il est aisé de le voir,

$$\rho^2 = a^2 + b^2.$$

Or, a désigne le rayon vecteur r du foyer correspondant, et comme d'ailleurs $b = k$, la relation précédente donne

$$r^2 = \frac{\rho^2}{1 + k^2}.$$

Substituant cette valeur dans l'équation des foyers, il vient

$$\rho^4 - \frac{2d^2}{1 - k^2}\cos 2\alpha . \rho^2 + \frac{d^4(1 + k^2)}{1 - k^2} = 0.$$

En raisonnant comme précédemment, on voit que cette équation représente des cassinoïdes, pourvu que le module k soit moindre que l'unité.