Nouvelles annales de mathématiques

Borchardt

Deux théorèmes de M. Borchardt sur les fonctions symétriques des racines d'une équation algébrique et sur les rayons de courbure principaux des surfaces

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 14 (1855), p. 26-27

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1855_1_14__26_1>

DEUX THÉORÈMES DE M. BORCHARDT

Sur les fonctions symétriques des racines d'une équation algébrique et sur les rayons de courbure principaux des surfaces.

Fonctions symétriques.

Soit l'équation algébrique

$$o = \varphi(x) = x^n - A x^{n-1} + \ldots +$$

racines $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n)$;

la fonction symétrique $\sum a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2} \ldots a_i^{\alpha_i}$ est le coefficient du terme $x_1^{-(\alpha_1+1)} x_2^{-(\alpha_2+1)} \ldots x_i^{-(\alpha_i+1)}$ dans le développement, suivant des puissances décroissantes, de l'expression suivante :

$$\frac{\Sigma \pm \varphi'(x_1)[x_2\varphi'(x_2)-\varphi(x_2)][x_3^2\varphi'(x_3)-2x_3\varphi(x_3)][x_4^3\varphi'(x_4)-3x_4\varphi(x_4)]\ldots[x_i^{i-1}\varphi'(x_i)-(i-1)\varphi(x_i)]}{\varphi(x_1)\varphi(x_2)\ldots\varphi(x_i).(x_2-x_1)(x_3-x_1)\ldots(x_i-x_1)(x_3-x_2)\ldots(x_i-x_2)\ldots(x_i-x_{i-1})}.$$

On voit que ce théorème est une extension du théorème dont on se sert ordinairement pour trouver la somme de la fonction symétrique $a_1^m + a_2^m + \ldots + a_n^m$, somme qu'on obtient en développant $\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}$.

Rayons de courbure principaux.

Soit $f(x, y, z) = 0$ l'équation d'une surface et soient

$$R = \left(\frac{df}{dx}\right)^2 + \left(\frac{df}{dy}\right)^2 + \left(\frac{df}{dz}\right)^2,$$

$$\xi = \frac{1}{\sqrt{R}}\frac{df}{dx}, \quad \eta = \frac{1}{\sqrt{R}}\frac{df}{dy}, \quad \zeta = \frac{1}{\sqrt{R}}\frac{\delta f}{dz};$$

de sorte que $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1$. Cela posé, faisons

$$x_1 = x - p\xi, \quad y_1 = y - p\eta, \quad z_1 = z - p\zeta;$$

p désignant une quantité indépendante de x, y, z ; formons le déterminant

$$\sum \pm \frac{dx_1}{dx}\frac{dy_1}{dy}\frac{dz_1}{dz}.$$

Ce déterminant, égalé à zéro, donne une équation du second degré en p; car le terme p^3 est multiplié par le déterminant $\sum \pm \frac{d\xi}{dx}\frac{d\eta}{dy}\frac{d\zeta}{dz}$, qui s'évanouit d'après un principe général pour tout déterminant dans lequel les n fonctions de n variables dont on considère les coefficients différentiels du *premier ordre* ne sont pas indépendantes. Or l'équation du second degré en p a pour racines les rayons des deux courbures principales de la surface.

Observation. Ces deux théorèmes sont dans une Lettre de M. Borchardt, du 21 mars 1854, adressée à M. Hermite, qui a bien voulu m'en faire part.