NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

MICHAEL ROBERTS

Note sur quelques applications de la théorie des surfaces

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 14 (1855), p. 268-271

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1855_1_14__268_1>

NOTE

Sur quelques applications de la théorie des surfaces;

PAR M. MICHAEL ROBERTS.

Une surface développable circonscrite à l'ellipsoïde

$$(\text{I}) \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

a pour équations aux différences partielles (en adoptant les notations habituelles)

$$(\text{II}) \qquad z - px - qy = \sqrt{a^2p^2 + b^2q^2 + c^2},$$

et l'arête de rebroussement de cette dernière aura pour équation aux différences ordinaires

$$\text{(III)} \quad \left\{ \begin{aligned} & a^2(ydz - zdy)^2 + b^2(zdx - xdz)^2 + c^2(xdy - ydx)^2 \\ & \qquad = b^2c^2dx^2 + a^2c^2dy^2 + a^2b^2dz^2. \end{aligned} \right.$$

Cette équation peut être mise sous la forme

$$\begin{aligned} & \left(\frac{xdx}{a^2} + \frac{ydy}{b^2} + \frac{zdz}{c^2}\right) \\ = & \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1\right)\left(\frac{dx^2}{a^2} + \frac{dy^2}{b^2} + \frac{dz^2}{c^2}\right), \end{aligned}$$

ce qui fait bien voir comment la surface (I) y satisfait; elle appartient aussi à une caractéristique quelconque des surfaces comprises sous l'équation (II).

Supposons maintenant que l'arête de rebroussement d'une surface développable circonscrite à la surface dont voici l'équation

$$\text{(IV)} \qquad \frac{x^2}{a^2 - k^2} + \frac{y^2}{b^2 - k^2} + \frac{z^2}{c^2 - k^2} = 1$$

se trouve sur la surface (I), il faut donc combiner avec l'équation (III) la suivante

$$\begin{aligned} & (a^2 - k^2)(ydz - zdy)^2 + (b^2 - k^2)(zdx - xdz)^2 \\ & \qquad + (c^2 - k^2)(ydy - ydx)^2 \\ = & (b^2 - k^2)(c^2 - k^2)dx^2 + (a^2 - k^2)(c^2 - k^2)dy^2 \\ & \qquad + (a^2 - k^2)(b^2 - k^2)dz^2, \end{aligned}$$

ce qui donne

$$\text{(V)} \quad \left\{ \begin{aligned} & (xdy - ydx)^2 + (zdx - xdz)^2 + (ydz - zdy)^2 \\ & = (b^2 + c^2 - k^2)dx^2 + (a^2 + c^2 - k^2)dy^2 \\ & \qquad + (a^2 + b^2 - k^2)dz^2. \end{aligned} \right.$$

Or les surfaces (I), (IV) peuvent être regardées comme les deux nappes d'une surface, lieu des centres de courbure d'une autre surface; par conséquent, l'équation (V) appartient à une ligne géodésique tracée sur la surface (I) (*). Cette nouvelle forme de l'équation d'une ligne géodésique sur une surface à centre du second degré diffère de celle qui a été donnée par M. Joachimsthal, et présente une analogie remarquable avec l'équation des lignes les plus courtes sur une surface conique quelconque. On peut énoncer ici le théorème suivant :

Si l'on prolonge les droites tangentes à une ligne géodésique sur une surface à centre du second degré jusqu'à ce qu'elles aillent rencontrer les plans tangents à la surface perpendiculaires à leur direction, les points de rencontre seront situés sur une sphère concentrique avec la surface, et cette sphère sera la même pour toutes les lignes géodésiques tangentes à une même ligne de courbure.

Considérons maintenant l'hyperboloïde cubique ou bien la surface représentée par l'équation

$$xyz = 1. \tag{VI}$$

La surface développable circonscrite à cette surface a

(*) Cette relation remarquable qui existe entre deux surfaces homofocales du second degré, montre clairement l'origine de la belle propriété, découverte par M. Chasles, que toutes les tangentes à une ligne géodésique sur une surface du second degré sont tangentes à une seconde surface homofocale à la première. Sous ce point de vue, ce théorème n'est qu'un cas particulier d'un théorème général donné par Monge, qui fournit aussi une autre interprétation géométrique de notre équation (III). Soit (S) une surface, telle que l'ensemble de (S) et de (I) est une surface, lieu des centres de courbure d'une autre surface ; l'equation (III) appartient aux lignes géodésiques tracees sur (S) et qui sont tangentes à la courbe d'intersection de (S) et (I). Toutes les surfaces (S) ont pour équation aux différences partielles la suivante :

$$\begin{aligned} a^2[(b^2 - c^2)q + \mathrm{P}(y + qz)]^2 + b^2[(a^2 - c^2)p + \mathrm{P}(x + pz)]^2 \\ + c^2[(a^2 - b^2)pq - \mathrm{P}(py - qx)]^2 \\ = [(b^2 - c^2)qx - (a^2 - b^2)pqz - (a^2 - c^2)py]^2 \end{aligned}$$

où

$$\mathrm{P} = 2 - px - qy.$$

pour équation aux différences partielles la suivante :

$$z - px - qy = 3(pq)^{\frac{1}{3}}.$$

Posons maintenant

$$xdy - ydx = Z,\quad zdx - xdz = Y,\quad ydz - zdy = X,$$

et nous trouvons, pour l'arête de rebroussement de cette dernière, l'équation suivante

$$X^2Y^2Z^2 + 18\begin{bmatrix} X^2dx^2(Y\,dy - Z\,dz) \\ + Y^2dy^2(Z\,dz - X\,dx) \\ + Z^2dz\;(X\,dx - Y\,dx) \end{bmatrix} = 243\,dx^2\,dy^2\,dz^2,$$

dont l'intégrale est le système suivant

$$z - \alpha x - \varphi\,(\alpha)\,y = 3\,[\alpha\varphi(\alpha)]^{\frac{1}{3}},$$

$$-x - \varphi'(\alpha)\,y = 3\,\frac{d}{d\alpha}[\alpha\varphi(\alpha)]^{\frac{1}{3}},$$

$$-\varphi''(\alpha)\,y = 3\,\frac{d^2}{d\alpha^2}[\alpha\varphi(\alpha)]^{\frac{1}{3}}.$$

Pour évaluer l'aire de la surface (VI), nous emploierons les angles qui déterminent la position de la normale. L'expression pour la surface (S) devient donc

$$S = \tfrac{1}{3}\int\!\!\int\frac{\sin\theta\,d\theta\,d\varphi}{(\cos\theta\sin\theta\sin\varphi\cos\varphi)^{\frac{1}{3}}},$$

et si les angles θ et φ sont indépendants, l'intégration se ramène aux fonctions elliptiques.

Je terminerai ces remarques en faisant observer que les surfaces (I) et (VI) sont comprises sous la même équation aux différences partielles, savoir

$$(z - px - qy)^4 = k^6(rt - s^2).$$

Le théorème énoncé se rattache à celui-ci : *Le sommet d'un angle trirectangle circonscrit à une surface à centre du second degré décrit une sphère concentrique.* Tm.