DE LAFFITTE

Théorème

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 14 (1855), p. 266-268
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1855_1_14__266_0>

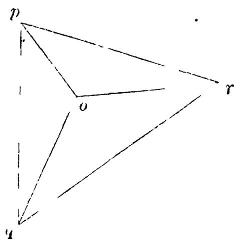
THÉORÈME;

PAR M. DE LAFFITTE,
Officier d'artillerie.

Si un triangle circonscrit à un autre se meut en restant semblable à lui-même, tous les points homologues décrivent une même circonférence.

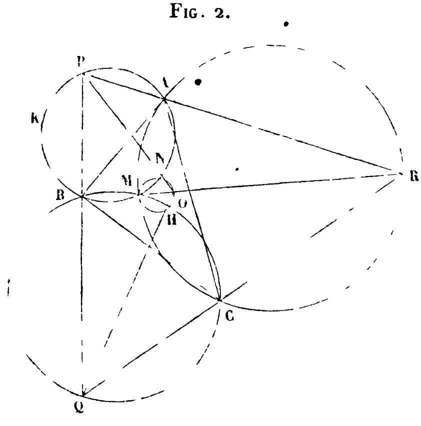
Soit o (*fig.* 1) un point quelconque intérieur au triangle

FIG. 1.



pqr donné d'*espèce*. Je détermine ce point au moyen des angles que font op, or, oq avec les côtés du triangle pqr. Ces angles sont invariables, ainsi que ceux des lignes op, oq, or entre elles. Soit ABC (*fig.* 2) le triangle inscrit

FIG. 2.



fixe ; sur les trois côtés je décris des segments capables des angles P, Q, R égaux respectivement à p, q, r. Soit PQR une position du triangle, O la position du point o ; les angles ORP, ORQ étant constants, le point M, intersection de OR avec le cercle décrit sur AC, est invariable ; il en est de même des points N et H. Donc, l'angle NOH étant invariable, le point O est sur le segment capable de cet angle décrit sur NH. C'est évidemment le cercle qui passe par les trois points M, N, H.

Corollaire I. Si un polygone se meut en restant semblable à lui-même, et que trois côtés déterminés passent chacun par un point fixe, un point quelconque du plan du polygone décrit un cercle.

Corollaire II. Si un quadrilatère est tel, que tous les rectangles circonscrits soient semblables entre eux, un point quelconque du rectangle circonscrit décrit un cercle et, partant, son centre.

Quel est le lieu géométrique des points du plan pour lesquels ce cercle a un rayon donné ?

Nous avons décrit sur les côtés du triangle inscrit des segments capables des angles du triangle circonscrit ; le point d'intersection M de deux de ces segments appartient évidemment au troisième. C'est là un *point fixe* pendant le mouvement du triangle, parce que les lignes qui le joindront aux trois sommets feront toujours avec les côtés les mêmes angles. Ce point est celui duquel les trois côtés du triangle inscrit sont vus sous des angles qui sont les suppléments de ceux du triangle circonscrit. Le diamètre du cercle que décrit un point quelconque sera la différence entre sa plus grande et sa plus petite distance au point fixe pendant le mouvement du triangle. Mais tous les points qui, dans une position particulière, seront à égale distance du point fixe, y seront encore dans toute autre position du triangle, car tous ces points reliés au triangle circonscrit donnent des figures semblables, et ce seront les seuls. Donc *les points qui décrivent des cercles égaux sont ceux qui sont également éloignés du point fixe.*

La plus grande distance d'un point au point fixe correspond au plus grand triangle. Par un principe connu, c'est celui dont les côtés sont parallèles aux lignes des centres des segments capables. La plus petite distance correspond au plus petit triangle qui est nul, se réduisant au point fixe M.

Donc

1°. Les points également éloignés du point fixe décrivent des circonférences égales;

2°. Le diamètre de cette circonférence est, pour chaque point, la distance au point fixe dans le triangle maximum;

3°. La circonférence décrite par un point quelconque passe au point fixe;

4°. L'enveloppe des cercles inscrits ou circonscrits au triangle passe au point fixe, car un de ces cercles est le point lui-même.