Nouvelles annales de mathématiques

Serret

Théorème de Fermat généralisé

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 14 (1855), p. 261-262
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1855_1_14__261_1>

THÉORÈME DE FERMAT GÉNÉRALISÉ;

PAR M. SERRET,
Examinateur d'admission à l'École Polytechnique.

Le théorème de Fermat d'après lequel la formule $x^n - x$ est divisible par n, quand n est premier, est susceptible d'une généralisation assez remarquable.

J'ai trouvé effectivement le théorème suivant :

Si a, b, c,..., k *désignent les nombres premiers iné-*

gaux qui divisent un entier quelconque n, *la formule*

$$x^n - \sum x^{\frac{n}{a}} + \sum x^{\frac{n}{ab}} - \sum x^{\frac{n}{abc}} + \ldots \pm x^{\frac{n}{abc\ldots k}} \quad (*)$$

est divisible par n, *quel que soit* x.

Je vous envoie cet énoncé, pensant qu'il pourra intéresser quelques-uns des lecteurs de votre estimable recueil; la démonstration est aisée à trouver.

J'ai été conduit au théorème dont il s'agit en cherchant à déterminer le nombre N des congruences irréductibles de degré n, suivant un module premier p, question qui se rattache à la théorie que j'ai développée dans la 25e leçon de mon *Cours d'Algèbre supérieure.* On trouve

$$N = \frac{p^n - \sum p^{\frac{n}{a}} + \sum p^{\frac{n}{ab}} - \ldots \pm p^{\frac{n}{abc\ldots k}}}{n}.$$

On a ainsi une démonstration indirecte du théorème énoncé plus haut pour le cas particulier où x est égal à un nombre premier p; mais ce théorème est vrai, je le répète, quel que soit l'entier x.