Nouvelles annales de mathématiques

Painvin

# Solution de la question 300

*Nouvelles annales de mathématiques 1re série*, tome 14 (1855), p. 254-257

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1855_1_14__254_1>

## SOLUTION DE LA QUESTION 300

( voir page 137 ),

PAR M. PAINVIN,
Docteur ès Sciences mathematiques.

Trouver une fonction de $a$, $b$, $c$, $d$, telle, qu'en y faisant $b = a$, elle devienne $\frac{c-d}{2(c+d)}$, et en y faisant $c = d$, elle devienne $\frac{a-b}{2(a+b)}$.

Soit $f(a, b, c, d)$ la fonction cherchée; posons

$$x = \frac{a-b}{2(a+b)}, \quad y = \frac{c-d}{2(c+d)},$$

d'où

$$a = b\frac{1+2x}{1-2x}, \quad c = d\frac{1+2y}{1-2y},$$

alors

$$f(a, b, c, d) = f\left(b\,\frac{1+2x}{1-2x},\ b,\ d\,\frac{1+2y}{1-2x},\ d\right)$$
$$= \mathrm{F}(x, y, b, d).$$

Il s'agit de déterminer F par la condition que pour $x = 0$ elle devienne $y$ et pour $y = 0$ elle devienne $x$.

$$(1)\quad \mathrm{F}(x, y, b, d) = \left\{\begin{aligned} & x\left(\frac{d\mathrm{F}}{dx}\right)_0 + y\left(\frac{d\mathrm{F}}{dy}\right)_0 + \frac{x^2}{1.2}\left(\frac{d^2\mathrm{F}}{dx^2}\right)_0 \\ & + xy\left(\frac{d^2\mathrm{F}}{dx\,dy}\right)_0 + \frac{y^2}{1.2}\left(\frac{d^2\mathrm{F}}{dy^2}\right)_0 + \ldots \\ & + (\mathrm{F})_0 + b\left(\frac{d\mathrm{F}}{db}\right)_0 + d\left(\frac{d\mathrm{F}}{dd}\right)_0 \\ & + \frac{b^2}{1.2}\left(\frac{d^2\mathrm{F}}{db^2}\right)_0 + bd\left(\frac{d^2\mathrm{F}}{db\,dd}\right)_0 \\ & + \frac{d^2}{1.2}\left(\frac{d^2\mathrm{F}}{dd^2}\right)_0 + \ldots; \end{aligned}\right.$$

$(\ )_0$ indiquant qu'on a fait, dans la fonction renfermée entre parenthèses,

$$x = 0,\quad y = 0,\quad b = 0,\quad d = 0,$$

Pour $y = 0$, F $(x, y, b, d)$ doit devenir $x$; introduisons cette hypothèse dans l'identité (1), on devra avoir encore une identité en $y$, ce qui fournira les conditions :

$$(2)\quad (\mathrm{F}_0) + b\left(\frac{d\mathrm{F}}{db}\right)_0 + d\left(\frac{d\mathrm{F}}{dd}\right)_0 + \frac{b^2}{1.2}\left(\frac{d^2\mathrm{F}}{db^2}\right)_0 + \ldots = 0,$$

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} & \left(\frac{d\mathrm{F}}{dx}\right)_0 = 1, && \left(\frac{d^2\mathrm{F}}{dx^2}\right)_0 = 0, \\ & \left(\frac{d^3\mathrm{F}}{dx^3}\right)_0 = 0, \ldots, && \left(\frac{d^p\mathrm{F}}{dx^p}\right)_0 = 0, \ldots \end{aligned}\right.$$

Pour $\cancel{x} = 0$, F $(x, y, b\,.\,d)$ doit se réduire à $y$, ce qui fournira les nouvelles conditions

$$(4)\quad \left\{\begin{array}{ll} \left(\dfrac{dF}{dy}\right)_0 = 1, & \left(\dfrac{d^2F}{dy^2}\right)_0 = 0, \\ \left(\dfrac{d^3F}{dy_3}\right)_0 = 0, \ldots, & \left(\dfrac{d^pF}{dy^p}\right)_0 = 0, \ldots . \end{array}\right.$$

Remarquons que l'équation (2) exprime que

$$F(0, 0, b, d) = 0,$$

c'est-à-dire que $F(x, y, b, d)$ se réduit à zéro lorsqu'on y fait à la fois $x = 0$ et $y = 0$, ou bien que $F(a, b, c, d)$ se réduit à zéro lorsqu'on y fait à la fois $a = b$ et $c = d$.

En vertu de ces relations $F(x, y, b, d)$ prendra la forme

$$(5)\quad \left\{\begin{array}{l} F(x, y, b, d) = x + y \\ + xy\left[\left(\dfrac{d^2F}{dx\,dy}\right)_0 + \dfrac{x}{1.2}\left(\dfrac{d^3F}{dx^2\,dy}\right)_0 + \dfrac{y}{1.2}\left(\dfrac{d^3F}{dx\,dy^2}\right)_0 + \ldots\right]. \end{array}\right.$$

Or, dans tous les termes renfermés dans cette parenthèse, on a

$$b = 0, \quad d = 0,$$

et, par suite,

$$a = 0, \quad c = 0,$$

puisque $x$ et $y$ sont quelconques. De plus, les coefficients des différentes puissances de $x$ et $y$ ne sont assujettis à aucune condition, et sont, par conséquent, entièrement arbitraires; donc l'expression entre parenthèses est une fonction arbitraire des seules variables $x$ et $y$ qui se réduit à $\left(\dfrac{d^2F}{dx\,dy}\right)_0$ pour $x = 0$ et $y = 0$.

$$F(x, y, b, d) = x + y + xy\,\varphi(x, y),$$

$\varphi$ étant une fonction arbitraire de $x$ et $y$, satisfait donc à toutes les conditions de la condition; il est d'ailleurs facile de le vérifier.

Par conséquent,

$$f(a, b, c, d) = \frac{a - b}{2(a + b)} + \frac{c - d}{2(c + d)} + \frac{(a - b)(c - d)}{4(a + b)(c + d)}\varphi$$

est la fonction la plus générale qui satisfasse à la question. Il est bien évident que nous pouvons prendre pour $\varphi$ une fonction arbitraire de $a$, $b$, $c$, $d$ en l'assujettissant à la seule condition de ne pas devenir infinie lorsqu'on y fait $a = b$ ou $c = d$; condition nécessaire pour pouvoir employer le développement (1) et qui d'ailleurs était imposée par l'énoncé même de la question.

On a donc définitivement

$$f = \frac{ac - bd + (a - b)(c - d)M}{(a + b)(c + d)},$$

M étant une fonction quelconque de $a$, $b$, $c$, $d$.

*Note du Rédacteur.* Dans une lettre à Huyghens, Leibnitz pose la question et donne pour solution

$$\frac{ac - bd}{(a + b)(c + d)};$$

cas particulier (*).