NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

Construction géométrique d'une ligne plane du troisième degré passant par neuf points donnés

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 14 (1855), p. 233-235

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1855_1_14__233_2>

CONSTRUCTION GÉOMÉTRIQUE

D'une ligne plane du troisième degré passant par neuf points donnés ;

D'APRÈS M. CHASLES.

(*Comptes rendus*, 30 mai 1853, page 943)

1. *Lemme.* Étant donnés cinq points d'une conique et une droite dans le plan de la conique, on peut construire

(*) Le sommet est le point ou le cercle de courbure a quatre points en commun avec la courbe *géométriquement* les intersections de la droite et de la conique sans décrire la conique.

2. *Lemme.* Étant donnés quatre points dans un plan et le rapport anharmonique d'un faisceau passant par ces points, on peut construire *géométriquement* les sommets des faisceaux homographiques passant par ces points, sommets situés sur une conique passant par les quatre points donnés.

3. *Lemme.* Étant données deux coniques dans le même plan, chacune par cinq points, si, de plus, trois de ces points sont communs aux deux coniques, on peut construire *géométriquement* le quatrième point d'intersection des deux coniques sans décrire ces coniques, et ce point est unique et toujours réel.

4. Problème. *Étant donnés neuf points d'une courbe plane du troisième degré, trouver deux faisceaux homographiques* F^1 *et* F^2, *dont les intersections donnent la ligne du troisième degré passant par les neuf points* (t. XII, p. 360).

Solution. Soient a_1, a_2, a_3, ..., a_9 les neuf points donnés et A, B, C les trois coniques déterminées,

A par les points a_1, a_2, a_3, a_4, a_5,
B — a_1, a_2, a_3, a_4, a_6,
C — a_1, a_2, a_3, a_4, a_7,

et une conique indéterminée D passant par les quatre points a_1, a_2, a_3, a_4, Les quatre coniques ayant quatre points en commun appartiennent à un faisceau F^2 (t. XII, p. 358 et 359).

Les quatre polaires d'un point quelconque pris dans le plan par rapport aux quatre coniques sont un faisceau F^1 homographique au faisceau F^2, et dont le rapport anharmonique est constant, quelque part qu'on prenne le pôle. Si l'on cherche un point P fixe tel, que les quatre rayons

Pa_5, Pa_6, Pa_7, PK forment un faisceau Q′ homographique au faisceau des polaires, ce faisceau Q′ sera aussi homographique au faisceau F^2.

Le quatrième rayon PK coupe la conique variable D correspondante en deux points; la suite de ces points est sur une courbe du troisième degré passant par les sept points $a_1, a_2, \ldots, a_7$ et par le point P (t. XII, p. 360). Le point P est arbitraire, mais si l'on prend le point P sur la conique M passant par les points a_5, a_6, a_7, a_8 et tel, que le faisceau Pa_5, Pa_6, Pa_7, Pa_8 soit homographique au faisceau des quatre polaires, il est évident que la courbe du troisième degré passera alors par les huit points $a_1, a_2, \ldots, a_8$ et encore par le point P. Construisons de même une conique N passant par les points a_5, a_6, a_7, a_9 et telle, que le faisceau Pa_5, Pa_6, Pa_7, Pa_9 soit homographique au faisceau des quatre polaires; les coniques M et N ont en commun les points a_5, a_6, a_7 et encore un quatrième point (lemme 3); prenant ce quatrième point pour P, la courbe du troisième degré, donnée par l'intersection du faisceau F^2 et F^1 ayant pour sommet P, passera par les neuf points a_1, a_2, $a_3, \ldots, a_9$; ce qu'il fallait faire.