NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

LECLERC

Note sur la base des logarithmes népériens

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 14 (1855), p. 225-228

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1855_1_14__225_0>

NOTE SUR LA BASE DES LOGARITHMES NÉPÉRIENS;

PAR M. LECLERC,
Conducteur des Ponts et Chaussees,
a Neufchâtel-en-Bray.

On trouve dans la Note IV de la *Géométrie* de Legendre la formule suivante :

$$(1)\qquad \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \cfrac{x}{1 + \cfrac{x^2}{3 + \cfrac{x^2}{5 + \ldots}}}.$$

Je remplace d'abord x par $\frac{1}{x}$, ce qui me donne

$$\frac{e^{\frac{1}{x}} - e^{-\frac{1}{x}}}{e^{\frac{1}{x}} + e^{-\frac{1}{x}}} = \cfrac{1}{x + \cfrac{x}{3x^2 + \cfrac{x^2}{5x^2 + \cfrac{x^2}{7x^2 + \ldots}}}},$$

ou

$$\frac{e^{\frac{2}{x}} - 1}{e^{\frac{2}{x}} + 1} = \cfrac{1}{x + \cfrac{1}{3x + \cfrac{1}{5x + \ldots}}}.$$

On tire de cette équation la formule générale

$$(2)\qquad e^{\frac{2}{x}} = \frac{x + 1 + \cfrac{1}{3x + \cfrac{1}{5x + \ldots}}}{x - 1 + \cfrac{1}{3x + \cfrac{1}{5x + \ldots}}}.$$

En y faisant $x = 2$, on a donc

$$e = \frac{3 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{10 + \cfrac{1}{14 + \cdots}}}}{1 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{10 + \cfrac{1}{14 + \cdots}}}};$$

puis, successivement,

$$e = 2 + \frac{3 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{10 + \cdots}} - 2\left(1 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{10 + \cdots}}\right)}{1 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{10 + \cdots}}}$$

$$= 2 + \frac{1 - \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{10 + \cdots}}}{1 - \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{10 + \cdots}}};$$

et enfin

$$(3) \qquad e = 2 + \frac{5 + \cfrac{1}{10 + \cfrac{1}{14 + \cfrac{1}{18 + \cdots}}}}{7 + \cfrac{1}{10 + \cfrac{1}{14 + \cfrac{1}{18 + \cdots}}}}.$$

Les réduites de même rang, dans les deux fractions continues qui entrent dans cette formule, ayant mêmes dénominateurs, il suffira, pour obtenir des valeurs e_1, e_2, e_3, etc., de plus en plus approchées du nombre e, de calculer les numérateurs de ces réduites. On trouve ainsi

$$e_1 = 2 + \frac{5}{7} = 2,71\ \ldots,$$

$$e_2 = 2 + \frac{51}{71} = 2,718\ \ldots,$$

$$e_3 = 2 + \frac{51 \cdot 14 + 5}{71 \cdot 14 + 7} = 2 + \frac{719}{1001} = 2,7182817\ldots$$

Remarque sur la Note précédente.

Si l'on prend la première valeur de e, on peut l'écrire ainsi :

$$e = 1 + \cfrac{2}{1 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{10 + \cfrac{1}{14 + \ldots}}}};$$

en sorte que l'irrationnelle e se trouve développée en une fraction continue très-simple et très-rapidement convergente.

Il est facile ensuite de transformer en série la fraction continue (*Nouvelles Annales*, tome VIII, page 170), et l'on trouve

$$e = 1 + 2\left\{\begin{array}{l} \dfrac{1}{1} - \dfrac{1}{1 \cdot 7} + \dfrac{1}{7 \cdot 71} - \dfrac{1}{71 \cdot 1001} \\ + \dfrac{1}{1001 \cdot 18089} - \ldots \end{array}\right\}.$$

E. C.

Note du Rédacteur. M. Leclerc indique la formule générale

$$a^{\frac{2}{x}} = 1 + \cfrac{2}{\left(\dfrac{x}{la}\right) - 1 + \cfrac{1}{3\left(\dfrac{x}{la}\right) + \cfrac{1}{5\left(\dfrac{x}{la}\right) + \ldots}}},$$

extraite de la *Science* du 4 et du 19 avril 1855, journal scientifique *quotidien*, le premier de ce genre et auquel les noms des collaborateurs promettent un grand succès, pourvu que ces noms soient autre chose que des noms.